里堂學算記五種

加減乘除釋卷六

江都焦循學

以甲乙各爲母子，以甲母乘乙子，以乙母乘甲子，爲維乘，亦爲互乘。

甲乙平列，以甲乘乙，以乙乘甲，此相乘也。以甲列右上，乙列左上，丙列右下，丁列左下，以甲乘丁，以乙乘丙，謂之維乘。維者，斜角之名，不直相乘而以斜，故曰維。九章算術盈不足術云：置所出率，盈不足各居其下，令維乘所出率，是也。張邱建算經有燕雀之術，劉孝孫草云：置雀一十五隻於右上，置盈四銖於右下，

又置雀一十二隻於左上置不足八銖於左下維乘之以右下四乘左上一十二得四十八以左下八乘右上一十五得一百二十維乘之式於此益明盈不足方程之妙全以維乘蓋左右之數不齊惟維乘則齊之也在方田法謂之互乘用於均輸亦然其實維乘互乘一而已矣孫子算經云今有三女長女五日一歸中女四日一歸少女三日一歸問三女幾何日相會術曰置長女五日中女四日少女三日於右各列一算於左維乘之各得所到數又各以歸日乘到數卽得此三色平列而亦曰維乘者蓋置五於右上

亦置一於左上置四於右中亦置一於左中置三於右下亦置一於左下三四乘一是左下中乘右上五三乘一是左上下乘右中四五乘一是左中下乘右下皆以斜行故曰維乘

凡不齊者以兩母相乘又以兩子互乘兩母則母同而子齊

九章算術方田合分術云母互乘子并以爲實母相乘爲法劉氏注云母互乘子謂之齊羣母相乘謂之同同者相與通同共一母也齊者子與母齊勢不可失本數也方以類聚物以羣分數同類者無遠數異

類者無近遠而通體者雖異位而相從也近而殊形者雖同列而相違也錯綜度數動之則諧其猶佩觿解結無往而不理焉乘以散之約以聚之齊同以通之此其算之綱紀乎循按相乘則兩數如一故謂之同三乘五得一十五五乘三亦得一十五互乘則兩子之差立見可以施加施減故謂之齊相乘者同加以數倍也維乘者互加以數倍也如出八盈三出七朒四盈不足題七八相乘均得五十六而八四維乘三十二七三維乘二十一三十二爲四之八倍二十一爲三之七倍化七个八个爲七倍八倍則七八相較多一个者爲多一倍

合盈不足之五十三卽此所多之一倍矣又如三人共羹四人共肉三四相乘一十二以三乘肉肉得三倍以四乘羹羹得四倍知十二人共三肉四羹蓋共肉之四人卽共羹之三人而多一人不能齊非相乘於上維乘於下不可得而齊也此齊同之術用諸算術最多神而明之通化無窮故合分減分等法首列於方田而劉氏之注亦不殫詳析以明其理試舉而言之方田合分術云三分之一五分之二問合之得幾何答曰十五分之十一循按三分之一五分之二猶云三人共一五人共二也三人共一五人共二欲

合而觀之。用相乘維乘。知十五人共十一也。即知三分之一。合五分之二。爲十五分之十一也。減分術云。九分之八。減五分之一。問餘幾何。答曰。四十五分之三十一。術曰。母互乘子。以少減多。餘爲實。母相乘爲法。循按九五相乘得四十五。九互乘一。得九。五互乘八。得四十。以九減四十。故爲三十一。此如云有物九而價八。如俗云八錢買九枚今損之。每五枚減一錢。則是四十五枚減九錢也。以四十五爲五九之數。則五八得四十。爲原價。以四十五爲九五之數。則九一如九。爲減數。同是物而減價。故同是母而減子耳。課分術云。九

分之八七分之六問孰多多幾何答曰九分之八多六十三分之二術曰母互乘子以少減多餘爲實母相乘爲法實如法而一卽相多術按九七相乘爲六十三九互乘六爲五十四七互乘八爲五十六以五十六減五十四餘二卽九分之八多六十三分之二也如九桃值八錢七杏值六錢欲知孰貴孰賤故加桃七倍加杏九倍皆爲六十三桃之六十三爲七九之數七八則價五十六杏之六十三爲九七之數九六則價五十四兩者相較知六十三桃之值多於六十三杏二錢此術同於減分李淳風云減分求其

餘數有幾課分以其餘數相多葢兩數相減其存者
即其多者故題不同而術則合一減於原價之中一
較於本數之外術既可通數乃相合其妙又有如是
者均輸鳧雁之術云鳧起南海七日至北海鴈起北
海九日至南海今鳧鴈皆起問何日相逢答曰三日
十六分日之十五術曰并日數爲法日數相乘爲實
實如法得一日劉氏注云置鳧七日一至鴈九日一
至齊其至同其日定六十三日鳧九至鴈七至循按
術不言互乘注言齊同者置七日九日於上置兩一
至於下七九相乘得六十三與兩一至互乘仍得七

得九并日數者并此互乘所得之七與九也以一乘不長故省之第并其日數而已又甲發長安五日至齊乙發齊七日至長安今乙發已先二日甲乃發長安問幾何日相逢答曰二日十二分日之一術曰并五日七日以爲法以乙先發二日減七日餘以乘甲日數爲實劉氏注云并五日七日爲法者猶并齊爲法置甲五日一至乙七日一至齊而同之定三十五日甲七至乙五至并之爲十二至者用三十五日也又一人一日爲牡瓦三十八枚一人一日爲牝瓦七十六枚今令一人一日作瓦牝牡相半問成瓦幾何

答曰并牝牡爲法牝牡相乘爲實實如法得一枚劉氏注云此術亦與鳧鴈術同牝牡互相并猶如鳧鴈日飛相并也李淳風云并牝牡爲法者并齊之意牝牡相乘爲實者猶以同爲實也循按兩術皆同鳧鴈之術惟發齊先甲二日故減而後相乘也減而後相乘不減而後互乘者互乘爲每日定率故必依其原數每日之率既定隨母數之增減而皆合矣

母七 子一 五

三十五

母五 子一 七

母八 子三 二十一

五十六

母七 子四 三十二

以兩母互乘諸子者。爲徧乘。
盈不足方程兩章。均以互乘爲術。而在方程謂之徧乘。蓋以首列之色爲母。本二色則共有四子。本三色則共有六子。子有四。則左子之二。皆以右母互乘右子之二。皆以左母互乘。子有六則左子之三。皆以右母互乘。右子之三。皆以左母互乘。所謂徧也。九章算術方程都術云。今有上禾三秉。中禾二秉。下禾一秉。實三十九斗。上禾二秉。中禾三秉。下禾一秉。實三十四斗。上禾一秉。中禾二秉。下禾三秉。實二十六斗。問上中下禾實一秉各幾何。術曰。置上禾三秉。中禾二

秉下禾一秉實三十九斗於右方中左禾列如右方以右行上禾徧乘中行劉氏注云先令右行上禾乘中行爲齊同之意循按爲齊同者謂中行上禾亦乘右行也蓋非上禾減盡不能以知下禾非相乘雜乘不能令減盡上禾而知下禾極參差雜錯而有以齊之無不一一就範如亂絲齊其一端其一端之長短皆燦然可覩故方程之術不能舍此或云如方程損之曰益益之曰損或云如方程各置所取以正負術入之或云如方程交易質之術有不同而所謂如方程者皆此徧乘術也均輸術云今有金箠長五尺斬

本一尺重四斤斬末一尺重二斤問次一尺各重幾何術曰以本重四斤偏乘列衰各自爲實此以一本重之數乘衆差而謂之偏乘則偏乘之名亦不専屬於方程之交互方程之交互蓋維乘之偏乘耳緣方程所舉因屬之互乘而復據均輸之稱而辨明之

六　四　二　七十八

三 ╲╱ 二——一——三十九
二 ╱╲ 三——一——二十六

六　九　三　七十八

兩單數在母則相乘維乘皆不用兩單數在子則用相

乘而不用互乘。

如云每桃一枚三錢每杏一枚五錢此兩單數在母也如云每桃三枚一錢每杏五枚一錢此兩單數在子也詳見前鳧鴈之術即兩單數在子

兩單數互在子母則以兩母兩子各相乘而專以子母之不單數者互乘。

兩單數互在子母者如云物一價三物三價一是也物一價三則三分物之一而價一也必三分物之一而價一而後與物三價一相齊今曰物一價三則既參差而不等若以齊同之常法馭之則以物一乘物

三價一仍得物三價一若置物一於左上置價三於左下又置物三於右上置價一於右下以右上之物三平乘左上之物一爲物三是兩母相乘也又維乘左下之價三爲價九是物一價三化爲物三價九也以左下價三平乘右下價一爲價三是兩子相乘也又維乘右上物三爲物九是物三價一化爲物九價三也物三價九物九價三乃兩兩相當而無單數矣

張邱建算經有雞翁之術云今有雞翁一直錢五雞母一值錢三雞雛三值錢一凡百錢買雞百隻問翁母雛各幾何下列答云翁四錢二十母十八錢五十

四雛七十八錢二十六又答云翁八錢四十母十一
錢三十三雛八十一錢二十七又答云翁十二錢六
十母四錢十二雛八十四錢二十八術曰雞翁每增
四雞母每減七雞雛每益三卽得甄鸞以此術難以
通曉而定其術云置錢一百在地以九爲法除之得
雞母之數不盡者反減下法爲雞翁之數李淳風釋
云旣雛三直錢一則是每雛值三分錢之一宜以雞
翁母各三因并之爲九劉孝孫草云置錢一百文在
地爲實又置雞翁一雞母一各以雞雛三因之翁得
三母得三並雛三并之共得九爲法除實得一十一

爲雞母數不盡一返減下法九餘八爲雞翁數循謂此術既非經旨亦非通術術數記遺云計數既舍算術宜從心計甄鸞注舉計數之事云今有雞翁一隻値五文雞母一隻値四文雞兒一文得四隻合有錢一百文買雞大小一百隻若依前術以雞兒四乘翁母并得十二爲法除實得八餘四減十二亦得八則是雞母雞翁皆八翁八得錢四十母八得錢三十四於實內減七十四存二十六以雞兒一文四隻計之當得雞兒一百□四更加雞翁雞母之十六則百二十隻矣術數記遺注又舉一問云雞翁一隻四文雞

母一隻三文雞兒一文三隻合錢一百文還買雞大小一百隻（還字承上所舉言之）依前術算之以雞兒乘翁母并得九除實得一十一餘一減九爲八是雞母一十一錢三十三雞翁八錢三十二并得六十五減實餘三十五以雞兒一文三隻計之當得一百〇五隻合翁母一十九爲一百二十四均與百隻不符故曰非通術也然則其術何如此貴賤差分之法耳貴賤之術於九章屬粟米如云今有出錢五百七十六買竹七十八箇欲其大小率之問各幾何術曰置所買以爲法以所率乘錢數爲實實如法而一不滿法者反以

實減法，法賤實貴，依此術算之，二百錢除一百雞，不成法，宜以三色差分之法馭之，以三除一百，得三十三，爲中數，雞母處翁雞之中，以當中數，則以三十三爲雞母之值，以三錢一隻除之，是雞母爲一十一隻也，於其物減一十一，存八十九，於其價減三十三，存六十七，是爲六十七錢，其買雞翁雞雛八十九錢，少物多，宜與反率之貴賤術等，乃以六十七除八十九，得一物，餘二十二，以二十二爲雞與翁皆不合，蓋粟米貴賤之術，雖有其錢其物，而所謂貴賤者，原無定率，故除餘即貴，以貴減法即賤，今既有其錢其物，而

復有貴賤之率是必以雞翁之價五乘物餘之八十九得四百四十五以雞雛之數三乘價餘之六十七得二百口一以二百口一減八十七餘一百一十二以四百四十五減六十七餘三百七十八五文一枚與一文三枚不便於減乃通一文三枚爲五文十五枚以十五枚與一枚相減餘十四枚用除一百一十二得數八即雞翁之八也又通五文一枚爲十五文三枚與一文三枚相減餘十四以除三百七十八得二十七即雞雛之價二十七也惟術有一定而數非一定故又立增四減七益三之例所以連列三答者

此也李淳風劉孝孫所立之術所謂不盡返減者似本諸粟米貴賤之術然不用其價除其物而以翁母雛并數除之亦異於本法以雛雛之三乘翁母此乘之無義理可言也蓋此術無他難惟五文一枚與一文三枚不便於減耳故必先以五文乘一文爲五文又乘三雛爲十五雛以三雛乘一雛爲三雛又乘五文爲十五文如是始有減地也

一　三
三　五　十五
十五
一　五

甲乙丙各爲母子以甲乙兩母相乘得數維乘丙子以甲乙兩母互乘兩子相加得數維乘丙母又相加則母同而子齊若以乙丙兩母相乘以維乘甲子以乙丙兩母維乘兩子相加以維乘甲母又相加其數等以甲丙兩母相乘以維乘乙子以甲丙兩母維乘兩子相加維乘乙母又相加其數等以甲母乘丙子以乙母連乘之以丙母乘甲子以乙母連乘之以甲母乘乙子以丙母連乘之相加其數等以甲母乙母相乘以丙子連乘之以乙母丙母相乘以甲子連乘之以甲母丙母相乘以乙子連乘之其數等三母連乘各以母除之以子乘之

其數等

乘法不分先後故以兩母一子連乘如是者三而後并之猶夫以兩母相乘兩母兩子互乘而後與一母一子互乘之也以甲母乘乙子又以丙母連乘是不啻丙甲之母相乘而乙子乘之也以乙母乘丙子又以甲母連乘是不啻乙甲之母相乘而丙子乘之也以丙母乘甲子又以乙母連乘是不啻丙乙之母相乘而甲子乘之也以甲母乘乙子而丙母連乘之以乙母乘甲子而丙母連乘之并之得數不啻以甲母乘乙子以乙母乘甲子先相并而後以丙母總乘之

也以乙母乘丙子而甲母連乘之以丙母乘乙子而甲母連乘之并之得數不啻以乙母乘丙子以丙母乘乙子先相并而後以甲母總乘之也以甲母乘丙子而乙母連乘之以丙母乘甲子而乙母連乘之不啻以甲母乘丙子以丙母乘甲子先相并而乙母總乘之也故以甲乙之母互乘子先相并而以丙母總乘之以甲乙之母相乘而以丙子連乘之即不啻兩母一子連乘如是者三也以母除其母以子乘之而數亦等者何也本以三四相乘以子一互之今以二三四連乘以一互之是多一以二乘之之數故以二

除之即不啻三四相乘而以一互之也本以二三相乘以子三互之今以二三四連乘以三互之是多一以四乘之之數故以四除之即不啻二三相乘而以三互之也本以二四相乘以子二互之今以二三四連乘以二互之是多一以三乘之之數故以四除之即不啻二四相乘而以二互之也除爲乘之反多一乘而以一除消之如不乘矣九章算術方田平分術云今有三分之一三分之二四分之三問減多益少各幾何而平答曰減三分之二者一四分之三者四并以益二分之一而各平於三十六分之二十三術

曰。母互乘子。副并爲平實。母相乘爲法。以列數乘未并者。各自爲列實。亦以列數乘法。以平實減列實。餘約之爲所減。并所減以益於少。以法命平實。各得其平。孫子算經載此條而解之云。置三分之一。三分之二。四分之三。在右方。之一之二之三。在左方。母互乘子。副并得六十三。置右爲平實。母相乘得三十六。爲法。以列數三乘未并者及法等數。爲九。約訖。減四分之三者二。減三分之二者一。并以益三分之一。各平於十二分之七。此較九章算術爲詳。循按母三母四。互乘子一爲十二者。三乘一爲三。四乘三爲十二也。母三。母四乘

子二爲二十四者，三乘二爲六，四乘六爲二十四也，母三母三乘子三爲二十七者，三乘三爲九，九乘三爲二十七也，并十二與二十四，二十七爲六十三，所謂母互乘子，副并爲平實也，以二三四連乘爲三十六，所謂母相乘爲法也，已并爲六十三，未并則一十二，二十四，二十七也，列數所列之行數也，三行則以三乘一十二爲三十六，三乘二十四爲七十二，三乘二十七爲八十一，列三十六，七十二，八十一，爲三行所謂各自爲列實也，又以列數乘法者，以列數三乘法三十六爲一百〇八也，以平實減列實者，以六十

三減三十六爲少二十七減七十二爲餘九減八十一爲餘十八也以十八與九并補於三十六則皆六十三是爲一百口八分之六十三以七約之故爲十二分之七也均輸術云今有程耕一人一日發七畝一人一日耕三畝一人一日耰種五畝今令一人一日自發耕耰種之問治田幾何術曰置發耕耰畝數令互乘人數并以爲法畝數相乘爲實實如法得一畝又今有假田初假之歲三畝一錢明年四畝一錢後年五畝一錢凡三歲得一百問田幾何術曰置畝數及錢數令畝數互乘錢數并以爲法畝數相乘又

以百錢乘之爲實實如法得一畝所云互乘相乘皆平分之法也孫子算經有蕩盃之術云二人共飯三人共羮四人共肉凡用盃六十五不知客幾何術以一十二爲率而未詳其義張邱建以爲未得其妙更造新術推盡其理其術云今有婦人於河上蕩盃津吏問曰盃何以多婦人答曰家中有客不知其數但二人共餐三人共羮四人共飯凡用盃六十五問人幾何答曰六十人術曰列置共盃人數於右方又置其盃數於左方以人數互乘盃數并以爲法令人數相乘以乘盃數爲實實如法得一劉孝孫草曰置人

數二三四列於右行置一一一盃數左行以右中三乘左上一得三又以右下四乘之得一十二又以右上二乘左中一得二又以右下四乘之得八以右上二乘左下一得二又以右中三乘左下二得六三位并之得二十六爲法又以二三四相乘得二十四以乘六十五盃得一千五百六十以二十六除之得六十人數合前問循謂此術即孫子三女同歸之術惟歸無定日盃有其數爲異歸無定日故止用維乘不用爲率更除蕩盃用十二十三爲率十二即二十四之半十三即二十六之半正由互乘連乘既得其率

數而故爲半之張邱建以爲未得其妙者恐不足以斥孫子此術子皆一數可以省乘而劉氏細草於右行之二三四必與左行之一一一維乘者所以備維乘之法也張邱建又有獵鹿之術云今有官獵得鹿賜圍兵初圍三人中賜鹿五頭次圍五人中賜鹿七頭次圍七人中賜鹿九頭并三圍賜鹿一十五萬二千三百三十三頭少半頭問圍兵幾何答曰三萬五千人術曰以三賜人數互乘三賜鹿數并以爲法三賜人數相乘并賜鹿數爲實實如法而得一此子母皆無單數觀於此而知蕩盃用維乘之理矣三色以

上之方程各以兩色偏乘以爲對減之地與蕩盃獨

鹿並殊此所以不曰維乘而改云偏乘也與

三　五　七

五　七　九

五乘　三乘　三乘

五爲　七爲　九爲

二十　二十　二十

五又　一又　七又

七乘　七乘　五乘

爲一　爲一　爲一

百七　百四　百三

十五　十七　十五

七	五	二十	五	三
九	六	四七	七	五
十五	二百三	十二	三百二	二十一	二十五

五	一	二十	七	三
七	二	六十	九	五
十	三百一	十七	二百四	二十七	三十五

三	五	三十	五	七
五	四	九十	七	九
十五	一百七	十二	二百八	四十九	四十五

右獵鹿維乘式

二　三　四

一　一　一

二乘　三乘　四乘

一爲　一爲　一爲

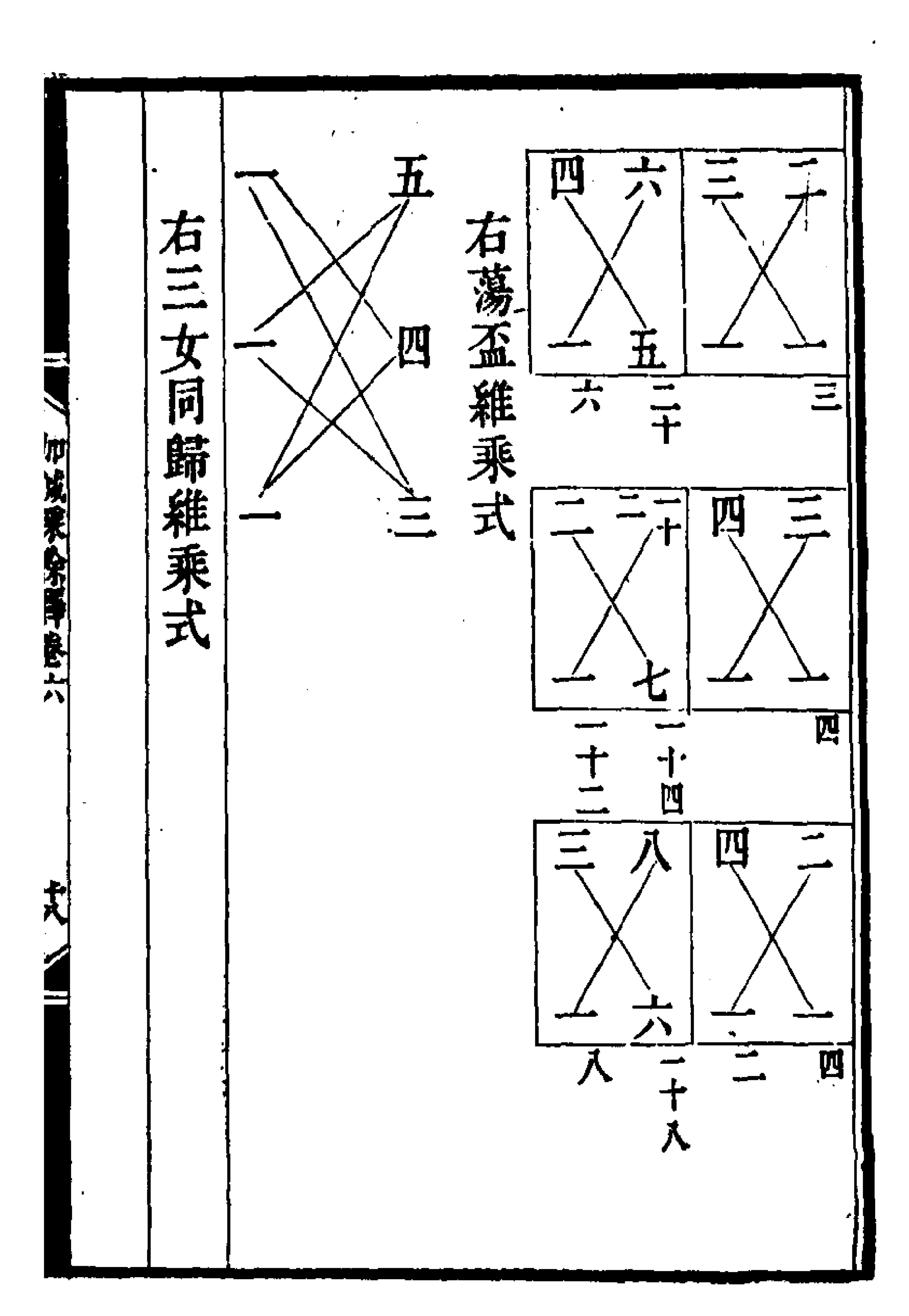
二又　三又　四又

以三　以四　以二

乘之　乘之　乘之

爲六　爲一　爲八

十二



右蕩盃維乘式

右三女同歸維乘式

上三 六 中二 四 下一 二 實三十九 七十八

六 九 三 二百〇二

上二 二 中三 三 下一 一 實三十四 三十四

上一 二 中二 四 下三 六 實二十六 五十二

右方程徧乘式

據甲以除甲乙，以所據爲母，以所除得爲子，亦母同而
子齊。據乙以除甲乙，其數等。據甲以除乙丙，據丙以除
甲乙，據乙以除甲丙，其齊同等。

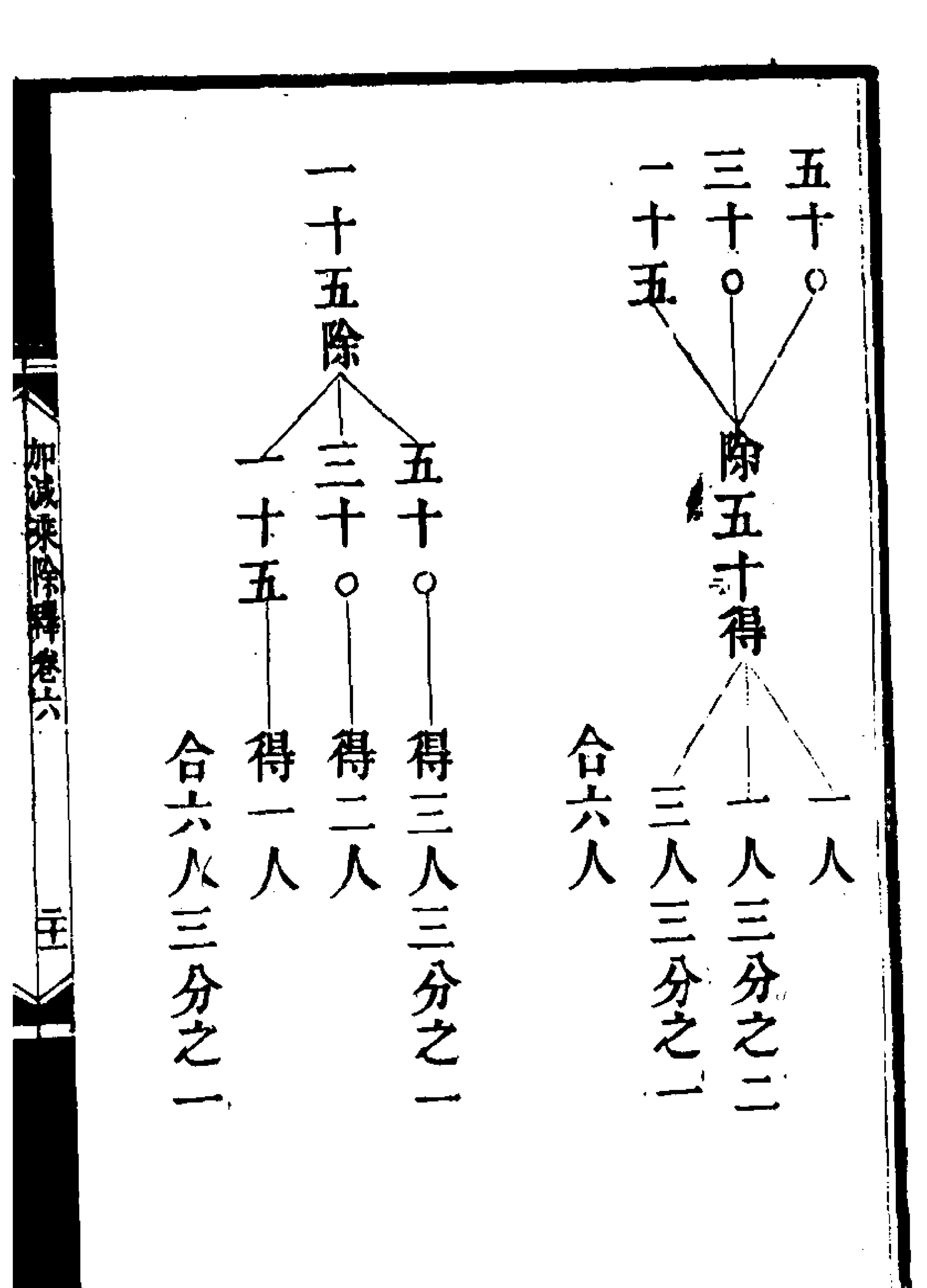
同者，同其所不同；齊者，齊其所不齊。何爲不同？如云
三人賜五鹿，七人賜九鹿，三人七人，所謂不同也。以
三七相乘，均得二十一，則同其所不同矣。惟不同同，故

不齊母既同矣子可以齊故互乘之而不齊者齊此鳧鴈之術亦卽蕩盃之術也又有矯矢之術九章均輸術云今有一人一日矯矢五十一人一日羽矢三十一人一日筈矢十五今令一人一日自矯羽筈問成矢幾何荅曰八矢少半矢術曰矯矢五十用徒一人羽矢五十用徒一人太半人筈矢五十用徒三人少半人并之得六人以爲法以五十矢爲實實如法得一矢劉氏注云此術言成矢五十用徒六人一日工也此同功其作猶鳧鴈其至之類亦以同爲實并齊爲法可令矢互乘一人爲齊矢相乘爲同今先令

同於五十矢矢同則徒齊其歸一也以此術爲鳧鴈
者當鴈飛九日而一至鳧飛七日而一至七分至之
二并之得二至七分至之二以爲法以九日爲實實
如法而一得一人日矯矢之數也又今有池五渠注
之其一渠開之少半日一滿次一日一滿次二日半
一滿次三日一滿次五日一滿今皆決之問幾何日
滿池答曰七十四分日之十五術曰各置渠一日滿
池之數并以爲法以一日爲實實如法得一日其一
術列置日數及滿數令日互相乘滿并以爲法日數
相乘爲實實如法得一日劉氏注云同齊有二術焉

可隨率宜也，循按鳧鴈之術出於和，矯矢之術出於較，鳧七日鴈九日，以七加九爲十六，以九加七，亦爲十六，乘卽加也，以七而九倍之爲六十三，以九而七倍之亦爲六十三，故曰出於和，矯矢五十用一人，羽矢三十用一人，筈矢十五用一人，五十，三十，十五，數不同也，今據矯矢之五十，徑令羽矢筈矢皆從之，於羽矢三十用一人者，依矯矢亦爲五十，則一人所造外，尙不足二十，爲三分之二，故益太半人，於筈矢十五，用一人者，依矯矢亦爲五十，則一人所造外，尙不足三十五，三十宜益二人，五爲三分十五之一，故又

益少半人，推此而據箬矢之十五，則令鏑矢羽矢亦爲十五，而又必損鏑之一人爲十分人之三，損羽之一人爲十分人之五，兩相比較而得之，故曰出於較，較即減，減即除，令羽矢箬矢就鏑矢，必以除而得數，羽矢之化，一爲一人三分之二者，以三十除五十而得之也，箬矢之化，一爲三分之一者，以一十五除五十而得之也，用較猶之用和，各視其所便以施之，故曰可隨率宜也，算數不外於齊同，齊同不外於和較而已。


五十〇
三十〇
一十五
除五十得
一人
一人三分之二
三人三分之一
合六人
一十五除
五十〇
三十〇
一十五
得三人三分之一
得二人
得一人
合六人三分之一

三十〇

一十五

除五十得

一人三分之二

除三十得

一人

二人

合四人三分之二

加減乘除釋卷七

江都焦循學

以母子分列而以維乘互之則爲齊同以母子相閒而以乘除消之則爲比例

算之爲術也有乘除而後有子母有子母而後乘除之用緐亦巧之所由生也以母子分列爲二將由分以求合則必齊同之於是有維乘徧乘連乘等術以母子閒列爲四將由此以知彼則必比例之於是有三率連比例四率斷比例等術惟舉此可以例彼故同其母卽齊其子也子母者法實也法實者主客也

算之至精極巧不外此而已矣

以甲除乙以乙乘之得丙丙之於乙猶乙之於甲是爲三率連比例以乙自乘以甲除之得丙其比例等以甲減乙以甲除之以乙乘之又與乙原數相加其比例等

衰分之等有遞析之衰分有四六之衰分有三七之衰分有二八之衰分於四六以四爲首而每加五蓋四之於六減餘二以四除之得〇五故以五爲率每一數加五分也四加爲六自六加之必爲九自九加之必爲一十三〇五分即以甲減乙以甲除之又以乙乘之與乙相加之謂也其實即同於以甲除之以

乙乘之之術葢甲除而乙乘既省去一減自省去一加四六以五爲加雖簡法而實止用於四六之衰非通法也中法有異乘同除西法有三率比例在九章爲粟米衰分均輸而總之爲今有推之爲均輸用其相連之數則以二率自乘用爲今有之例則二率三率相乘無論自乘相乘皆異乘也葢三率與首率例不與二率例今二率三率相乘是爲異乘其二率自乘者亦由二率三率數同之故如云一人出三設三人出幾何以三自乘實以人與出異乘也

以甲乘甲得丙又乘乙得丁丁之於丙猶乙之於甲是

爲四率斷比例以甲乘甲得丙以甲除乙乘之得丁其比例等以甲乘甲以甲除之以乙乘之其比例等以甲自乘又以甲減乙以甲除之而乘之以相加其比例等衰分之法於四六既以五爲加於二八則用四因於三七則雜用三因九因而歸之於三除七乘豈二八三七眞殊於四六哉二八用四乘者以二除八得四以八乘之得三十二不異於四六之求得九也三七之衰以三除七得二三三不盡三七相減得四以三除四得一三三亦不盡不盡之數雖有子母命分之法而不可用爲衰分之率故常法有不可用者舍其

疏求其密而別設一數如以三乘三爲九以甲乘甲以三除之爲三以甲除之以七乘三爲二十一以乙乘之於是二十一之於九猶之七之於三又以三除二十七得七以七乘之得四十九於是四十九之於二十一猶之二十一之於九矣此用之於四六二八無不然所以通其術之變而非法有不同也

以甲除乙以丙乘之得丁丁之於丙猶乙之於甲以乙乘丙以甲除之其比例等

九章粟米今有術云以所有數乘所求率爲實以所有率爲法實如法而一衰分術云各置列衰副并爲

法以所分乘未并者各自爲實實如法而一二者其法一也粟米者有定率衰分者無定率而副并以爲定率衰分後十一條卽粟米之今有術粟米後之貴賤術卽後世之貴賤差分如四六衰分其數二十甲乙分之甲得六乙得四必并四六爲十以除二十得二甲得六則以六乘二得十二乙得四則以四乘二得八或先乘後除亦可以甲之六乘二十爲一百二十以十除之得十二以乙之四乘二十爲八十以十除之得八先除後乘者以實得實其理易明先乘後除者以虛得實其理似秘其實不出於一乘一除之

相消先乘則數多於所得故除以損之先除則數少於所得故乘以益之必先乘者劉氏注云先除後乘或有餘分故術反之是也衰分視粟米多一副并蓋有所求率所有數而無所有率必副并所有數以爲所有率所以於無定率求定率也推之均輸亦第以無定率求定率近有疊借互徵借衰互徵大抵不外乎均輸而究其原則衰分而已矣蓋以已定之率求今有之數固爲米鹽交易之所便若當艱深隱伏之際有不可以常法馭者於無定之中立爲有定之率以相比例小之如孫子之蕩杯用十二十三相例大

之如海島之重差用餘句餘股相例以至弧三角之以角度例經緯度矢較之以先數例後數詳見釋弧橢圓之以倍差例句股大徑例小徑詳見釋橢為法甚易而為用甚神梅氏謂方程之術所用至廣吾謂衰分之術所用尤廣也

二　以四除之得五　以六乘之得三

四　以二除之得二　以三乘之得六

三　以六除之得五　以四乘之得二

六　以三除之得二　以二乘之得四

右先除後乘

二　以六乘之得十二　以四除之得三

四　以三乘之得十二　以二除之得六

三　以四乘之得十二　以六除之得二

六　以二乘之得十二　以三除之得四

右先乘後除

以乙乘丙以甲除之又以戊除之得己以乙乘丙以甲乘丁除之亦得己

九章算術方田乘分術云今有田廣七分步之四從五分步之三問為田幾何答曰三十五分步之十二術曰母相乘為法子相乘為實實如法而一劉氏注

云此田有廣從難以廣諭設有問者曰馬二十匹直金十二斤今賣馬二十匹三十五人分之人得幾何答曰二十五分斤之十二其爲之也當如經分術以十二斤金爲實三十五人爲法設更言馬五匹直金三斤今賣四匹七人分之人得幾何答曰人得三十五分斤之十二其爲之也當齊其金人之數皆合初問入於經分矣然則分子相乘爲實者猶齊其金也母相乘爲法者猶齊其人也同其母爲二十馬無事於同但欲求齊而已又馬五匹直金三斤完全之率分而言之則爲一匹直金五分斤之三七人賣四馬

一人賣七分馬之四分子與人交互相生所從言之異而計數則三術同歸也循案以廣乘從則以母子各相乘而得數其理易明劉氏推言之以見此術之妙而用之廣也馬二十匹值金十二斤今買馬二十匹則價之爲十二斤不容算矣惟是賣者三十五人故以三十五除十二斤也又設如馬五匹值金三斤今賣馬四匹此三率比例爲差分今有之常法詳見後惟是賣馬四匹者爲七人則必以今有術求得數而又以七除之也以今有率求得數是以馬四乘價三而以馬五除之卽不啻馬五除價三而以馬四乘之

也以馬五除價三而以馬四乘之又以人七除之卽不啻以馬五除價三又以人七除馬四而以所除乘所除也以馬五除價三得一馬之價以人七除馬四得一人之馬以一人之馬乘一馬之價卽不啻三十五人除二十馬之價也乃不用兩除而用兩乘則消息之妙矣馬五而價三人七而馬四是馬五人七爲母價三馬四爲子馬五馬四以同名而互爲母子故兩用相乘不用維乘也馬五價三以馬四乘價三亦二率三率相乘之例而不以馬五除之而以馬五乘人七得數而後除之者蓋兩除而以一乘并之也又

九章均輸術云今有程傳委輸空車日行七十里重車日行五十里今載太倉粟輸上林五日三返問太倉去上林幾何術曰并空重里數以三返乘之為法令空重相乘又以五日乘之為實實如法得一里此空以今有術除得三返之數又以三返除之得太倉去上林之數今不以三返除於後而以三返乘於前以乘代除之法也與賣馬之術同為一理然乘主增而除主損連除雖損之又損而其法則增故乘其法以除之而增損如故連乘則有增而無損故不可以除代也

馬五　一率

金三　二率

馬四　三率

金二四　四率

人七除金二四得七之二十四半之為三十五之十二

馬五　人七　乘得三十五

馬四　金三　乘得一十二

三十五除一十二為三十五之十二倍之為七之二十四

以乙乘丙，以甲除之，得丁。又以己乘，以戊除之，得庚。庚之於丁，猶己之於戊，丁之於丙，猶乙之於甲。是爲重今有。以乙丙己連乘爲實，以甲乘戊爲法，除之，其比例等。九章算術均輸有絡絲之術云，今有絡絲一斤，爲練絲十二兩，練絲一斤，爲青絲一斤十二銖。今有青絲一斤，問本絡絲幾何。術曰，以練絲十二兩，乘青絲一斤十二銖爲法，以青絲一斤，銖數乘練絲一斤兩數，又以絡絲一斤乘之爲實，實如法得一斤。劉氏注云，置今有青絲一斤，以練絲三百八十四乘之，爲實，實如青絲率三百九十六而一，所得青絲一斤，練絲之

數也。又以絡率十六乘之。所得爲實。以練率十二爲法。所得即練絲用絡絲之數也。雖各有率。不用中閒。故令後實乘前實。後法乘前法。而并除也。按此絡絲與練絲有定率。練絲與青絲有定率。若由青絲求練絲。則衰分今有之常術。今由青絲求絡絲。必先以青絲練絲定率。求得練絲數。而後以爲三率。用練絲絡絲定率求得絡絲數。疊用衰分今有之術。故曰重今有云不用中閒者。中閒謂練絲數也。有練絲數可求絡絲數。今有青絲以求絡絲。故非用中閒不可。不用中閒則青絲可以徑求絡絲。何也。齊兩定率。爲一定

率也其理與馬五人七同見卷五馬五疋價三斤今賣馬四疋七人分其價故必用衰分今有術求得四馬之賣而後以七人除之是既以馬五除又以人七除乃以馬五乘人七除之卽不啻兩除者化人七於馬五中也重用今有亦兩次用除今以首率乘首率二率乘二率亦化練絲與絡絲之定率於青絲練絲之中也練絡之率練一而絡二青練之率青一而練二其乘也化練於青亦化練於絡於是青與絡無定率者有定率矣青與絡有定率則不必求得練數而自得合數所以不用中閒也由青練之率而得練是化

青於練則用練之率以得絡以練之率乘青之率是化練於青則用青之數以得絡消息之妙也欲自青得絡故以練從青以練從青自不得不以練從絡互以相乘故劉注云凡率錯互不通者皆積齊同用之雖四五轉不異也均輸術又云今有人持米出三關外關三而取一中關五而取一內關七而取一餘米五斗問本持米幾何術曰置米五斗以所稅三之五之七之爲實以餘不稅者二四六互相乘爲法實如法得一斗又云今有人持金出五關前關二而稅一次關三而稅一次關四而稅一次關五而稅一次關

六而稅一。并五關所稅適重一斤。問本持金幾何。術曰。置一斤。通所稅者以乘之。爲實。亦通其不稅者以減所通餘爲法。實如法得一斤。劉氏皆以重今有衍解之。蓋一爲稅之餘。一爲稅之總。所舉雖殊。而一爲三色衰分。一爲五色衰分。其術不異。由內關之所餘求得內關之原數。以爲中關之所餘。由中關之所餘求得中關之原數。以爲外關之所餘。又由外關之所餘。求得外關之原數。七而一。是七爲原率。六爲餘率。五而一。是五爲原率。四爲餘率。三而一。是三爲原率。二爲餘率。以原率之七五三相乘。爲一百〇五。以餘

率之六四二二相乘爲四十八則已化外關中關於內關之中由內關之餘可以得外關之原如化練於青之中由青可得絡也由五關之并稅求得五關之原數以原數六分之一減并稅爲四關之并稅求得四關之原數以五分之一減并稅爲三關之并稅求得三關之原數以四分之一減并稅爲二關之并稅求得二關之原數以三分之一減并稅爲前關之稅求得前關之原數爲本持金數因以并數求原數在五關則并五次之稅故六之一以六爲原率必以五乘一爲并率在四關則并四次之稅故五之一以五爲

原率必以四乘一爲并率在三關則并三次之稅故
四之一以四爲原率必以三乘一爲并率在二關則
并二次之稅故三之一以三爲原率必以二乘一爲
并率前關二之一則二爲原率一爲稅率以原率之
六五四三二相乘爲七百二十以并率之五四三二
一相乘爲一百二十則化四次之關於五關之中以
并率相乘之數減原率相乘之數爲總稅之率則由
五關之并稅可徑得前關之原數雖多一乘減之𥿄
而理與絡絲持米之理一也然則以練從青絡可得
絡不可得練者以青絡從練已爲兩練練與練不可

以例練也。張邱建算經云：今有生絲一斤，練之，折五兩。練絲一斤，染之，出三兩。今有生絲五十六斤八兩七分兩之四，問染得幾何。術曰：置一斤兩數，以折兩數減之，餘乘今有絲斤兩之數，又以出兩數併一斤兩數乘之，爲實。一斤兩數自乘爲法，實如法得一兩數。按此即重今有術，以常法馭之，用生絲一斤爲一率，減折數爲二率，今有生絲爲三率，求得練絲之數。又以練絲一斤爲一率，加出數爲二率，求得練絲爲三率，求得染絲之數，以法乘法，則以生絲一斤乘練絲一斤也。因皆是一斤，故云以一斤兩數自乘也。以

實乘實則以生絲一斤減折數乘練絲一斤加出數也然後以實乘實之數乘生絲斤兩用法乘法之數除之得染數今先以減數生絲乘生絲斤兩後以加數練絲乘之者乘法先後同也術又云今有絲一斤八兩直絹一疋今持絲一斤裨錢五十得絹三丈今有錢一千得絹幾何術曰置絲一斤兩數以一疋尺數乘之以絲一斤八兩數而一所得以減得絹尺數餘以一千錢乘之爲實以五十錢爲法實如法而一此亦重今有術惟三丈之絹爲絲錢之總數今以錢求絹不可爲率故先以絲得絹減爲錢絹之率也又

術云今有鐵十斤一經入爐得七斤今有鐵三經入爐得七十九斤一十一兩問未入爐本鐵幾何術云置鐵三經入爐得斤兩數以十斤再自乘乃乘上爲實以七斤再自乘爲法實如法而一按七斤爲一率十斤爲二率七十九斤一十一兩爲三率求得四率爲兩經入爐之數又以四率爲三率求得四率爲一經入爐之數又以四率爲三率求得四率爲未經入爐之數三次皆七斤十斤爲定率故以七斤再自乘爲法乘法以十斤再自乘爲實乘實猶絡絲之術雖率數不改而法無異也術又云今有絹一疋買紫草

三十斤，染絹二丈五尺。今有絹七疋，欲減買紫草，還數染餘絹，問減絹買紫草各幾何。術曰：置今有絹疋數，以本絹一疋尺數乘之，爲減絹實；以紫草三十斤乘之，爲買紫草實；以本絹尺數并染尺爲法，實如法得一。按此以重今有術得之也。七疋爲買草及自染之總數，則紫草三十斤與所染之二十五尺總數爲六十五尺也，一疋四十尺合二十五尺爲六十五尺。故總數六十五尺與紫草三十斤，猶總數二百八十尺七疋尺數與所買草之總數；六十五尺與買草絹四十尺一疋尺數，猶總數二百八十尺與所減絹數。一以總數得絹，一以總數得

草若問染數則以總數六十五尺爲一率染數二十五尺爲二率總數二百八十尺爲三率求得四率亦以總數得染數也有重今有術不可以法乘法實乘實求之者張邱建算經云今有人持錢之洛賈利五之初返歸一萬六千第二返歸一萬七千第三返歸一萬八千第四返歸一萬九千第五返歸二萬凡五返歸本利俱盡問本錢幾何術曰置後返歸錢數以五乘之以七乘第四返歸錢數加之以五乘之以四十九乘第三返歸錢數加之以五乘之以三百四十三乘第二返歸錢數加之以五乘之以二千四百一

乘初返歸錢數加之以五乘之以一萬六千八百七
而一得本錢數循按利五之以一萬得利五千言之
則一萬五千爲本利共率一萬爲本率以本率爲二
率以第五返之二萬爲三率求得第五返之本加入
第四返之一萬九千爲第四返之本利共數又以五
乘之以一五除之得第四返之本加入第三返之一
萬八千爲第三返之本利共數又以五乘之以一五
除之得第三返之本加入第二返之一萬七千爲第
二返之本利共數又以五乘之以一五除之得第二
返之本加入第一返之一萬六千得第一返之本利

共數以五乘之以一五除之得第一返之本即所持往洛之本錢也法本李淳風九章算術注釋惟後次之本即分自前次之本利共數而每次返歸之本利又分自後次之本互相牽制故必遞用今有之術而遞相加求得之本必加而後爲次求之三率故不可實乘實法乘法以徑從最後之錢得最初之本也張邱建遞以五乘而總以一萬六千八百七除之者一萬六千八百七者七自乘五次之數即法乘法之理實不可乘實故遞用五乘蓋利五之當作利五之二五爲本二爲利合得七爲本利共率故五乘而七除若五是利不

得以五乘之而七亦無著算書不可有一字誤亦不容有一字誤也以五乘之直加前次錢數以待除可也必以七遞自乘乘之者下既以七自乘者總除則此乘猶不乘言算者非省之以自便即故為艱深以惑人皆宜細審之耳

青甲本有之法　一率　　練戊本有之法　一率

練乙本有之實　二率　　絡己本有之實　二率

青丙今有之數　三率　　練丁求得之數　三率

練丁求得之數　四率　　絡庚求得之數　四率

右重今有算式

青前法　練後法　青青乘練則化練於青

練前實　絡後實　絡絡乘練則化練於絡

青移與絡爲比例　練中閒不用　青移丙於此以練乘絡爲二率以此三率乘之似於連乘

練不用中閒　絡移爲青率所得　絡所得絡仍爲庚

右後實乘前實後法乘前法式

有兩率以比例之是爲衰分無兩率而求爲兩率以比例之是爲均輸

九章算術於諸章皆有定法惟均輸一章極變化錯綜之致無一定之齊法而無不齊皆會歸於衰分之今有而所以爲比例之用者無率而有率此實算數

之至神自重差八綫弧三角橢圓諸術極幾何之巧無非無率而有率以會歸於衰分之今有也試爲詳述之均輸弟一題云今有均輸粟甲縣一萬戶行道八日乙縣九千五百戶行道十日丙縣一萬二千三百五十戶行道十三日丁縣一萬二千二百戶行道二十日各到輸所凡四縣賦當輸二十五萬斛用車二萬乘欲以道里遠近戶數多少衰出之問粟車各幾何按此有戶數多少之不同則衰分法也今於戶數多寡中又兼道里遠近是衰又有衰必先齊其衰而後可用衰分法也術云令縣戶數各如其本行道

日數而一。以爲衰。劉氏注云。據甲行道八日。因使八戸共出一車。乙行道十日。因使十戸共出一車。計其在道。則皆戸一日出一車。故可爲均平之率。此以除爲齊同者也。第二題云。今有均輸卒。甲縣一千二百人。薄塞。乙縣一千五百五十人。行道一日。丙縣一千二百八十人。行道二日。丁縣九百九十人。行道三日。戊縣一千七百五十人。行道五日。凡五縣賦輸卒一月一千二百人。欲以遠近戸率多少衰出之。問縣各幾何。術曰。令縣卒各如其居所。及行道日數而一。以爲衰。按此遠近與多少相兼。同於前。但前皆在道。此

有所居故必先以居所三十日一月日數各加行道日數然後除縣卒之數也第三題云今有均賦粟甲縣二萬五百二十戶粟一斛二十錢自輸其縣乙縣一萬二千三百一十二戶粟一斛十錢至輸所二百里丙縣七千一百八十二戶粟一斛十二錢至輸所一百五十里丁縣一萬三千三百三十八戶粟一斛十七錢至輸所二百五十里戊縣五千一百三十戶粟一斛十三錢至輸所一百五十里凡五縣賦輸粟一萬斛一車載二十五斛與僦一里一錢欲以縣戶賦粟令勞費等問縣各粟幾何術曰以一里僦價乘至輸

所里以一車二十五斛除之加一斛粟價則致一斛之費按每車一里一錢二百里則二百錢矣此以一里僦價乘至輸所里也然一車二十五斛必以二十五斛除二百錢得八乃爲每斛一里僦八錢也加於每斛粟價則各項之衰并而歸於每斛矣又以每斛之費除戸數則每戸出一錢爲均賦之率葢遠近多少同於前而粟價有貴賤僦價有多寡故必以僦價乘里數而以一車之數除之以加於每斛粟價而後齊也第四題云今有均賦粟甲縣四萬二千算粟一斛二十傭價一日一錢自輸其縣乙縣三萬四千二

百七十二算粟一斛十八傭價一日十錢到輸所七十里丙縣一萬九千三百二十八算粟一斛十六傭值一日五錢到輸所一百四十里丁縣一萬七千七百算粟一斛十四傭值一日五錢到輸所一百七十五里戊縣二萬三千四十算粟一斛十二傭價一日五錢到輸所二百一十里己縣一萬九千一百三十六算粟一斛一十傭價一日五錢到輸所二百八十里凡六縣賦粟六萬斛皆輸甲縣六人共車車載二十五斛重車日行五十里空車日行七十里載輸之間各一日粟有貴賤傭各別價以算出錢令費勞等

問縣各粟幾何術曰以車程行空重相乘爲法并空重以乘道里各自爲實實如法得一日加載輸各一日而以六人乘之又以傭價乘之以二十五斛除之加一斛粟價即致一斛之費各以約其算數爲衰按空重之行不齊故先齊同之得三百五十里行十二日用今有術求得各縣輸到日數因傭價視人視日故既以人數乘之復以傭價乘之得每縣每一車傭價之總數一車載二十五斛以二十五除之得每斛傭價之總數矣以一斛輸到之傭值加入一斛之粟價是道里遠近粟價貴賤傭值多寡俱均而歸之於

斛又以每斛之費除算數猶以每斛之費除戶數也

輸載之閒各一日注云各一日者卽二日也此宜是

停駐之日數故用加於在道之日數乃日數以往來

爲齊同宜倍到輸所之里以乘人數術未備也又云

今有善行者行一百步不善行者行六十步今不善

行者先行一百步善行者追之問幾何步及之術曰

置善行者一百步減不善行者六十步餘四十步爲

法以善行者之一百步乘不善行者先行一百步爲

實實如法得一步按先行百步而追及之必能餘一

百步而後可也故用減法得其所餘之率以善行之

一百步乘不善行之一百步者其實以善行之一百步乘善行所餘之一百步也又云今有不善行者先行十里善行者追之一百里先至不善行者二十里問善行者幾何里及之術曰置不善行者先行十里以善行者先至二十里增之以爲法以不善行者先行十里乘善行者一百里爲實實如法得一里按先行十里而追之止餘十里便及今餘三十里故行一百里耳是三十里與一百里可例一十里與追及之里數也以不善行之十里乘善行之一百里者其實以善行所餘之十里乘所行之一百里也又云今有

兎先走一百步犬追之二百五十步不及三十步而止問犬不止復行幾何步及之術曰置兎先走一百步以犬走不及三十步減之餘爲法以不及三十步乘犬追步數爲實實如法得一步按先走百步犬追二百五十步不及三十步然則若先走七十步則二百五十步剛追及矣故七十與二百五十猶三十之與復行追及步數也以不及三十步乘犬追步數者卽以兎走之三十步乘二百五十步也又云今有客馬日行三百里客去忘持衣日已三分之一主人乃覺持衣追及與之而還至家視日四分之三問主人

馬不休日行幾何術曰置四分日之三除三分日之一半其餘以爲法副置法增三分日之一以三百里乘之爲實實如法得主人馬一日行按四分日之三爲客馬之行與主人馬往還之行共數也三分日之一爲客馬單行之數四分日之三內減去三分日之一劉氏注云除即減也爲主人馬往還之數半之爲主人馬追及之數詳見前加三分之一爲客馬當主人馬追及之數是客行十三當主人之行五也亦主人行五當客行之十三也故五與十三猶三百與主人馬不休之數也又云今有金箠長五尺斬本一尺重四斤斬末

一尺重二斤問次一尺各重幾何術曰令末重減本重餘即差率也又置本重以四間乘之爲下第一衰副置以差率減之每尺各自爲衰劉氏注云此術五尺有四間者有四差也令本末相減餘即四差之凡數以四約之即得每尺之差以差數減本重餘即次尺之重今此率以四爲母故令母乘本爲衰通其率也又注云此雖迂迴然是其舊故就新而言之按甲戊相減得二尺以四除之得半尺於二尺加半尺爲丁於二尺半加半尺爲丙於三尺加半尺爲乙此注所云以四約之即得每尺之差也然爲捷法非均輸

法經列此題以明均輸之義故不從省注以爲遲回未知經意不用四間除之而用四間乘之不用加之而用減之欲得比例之率也此可明加減乘除相表裏之指亦可明比例之法無在不可用也又張邱建算經題云今有方亭下方三丈上方一丈高二丈五尺欲接築爲方錐問接築高幾何術曰置上方尺數以高乘之爲實以上方尺數減下方尺數餘爲法實如法而一按所有者方亭所求者方錐不可爲比例故必減去上方合兩旁之句股爲方錐也又題云今有築城上廣一丈下廣三丈高四丈今已築高一丈

五尺問已築上廣幾何術曰置城下廣以上廣減之又置城高以減築高餘相乘以城高而一所得加城上廣卽得按先以三丈與一丈減是去其中之縱方而存其兩畔之兩句股也以一丈五與四丈減者去其新築之高而存其未築之數也何也三丈者四丈之底也二丈二尺五寸者二丈五尺之底也惟兩底同乃可比例此所以不用築高而用減餘也又題云今有鹿直西走馬獵追之未及三十六步鹿同直北走馬俱斜逐之走五十步未及一十步斜直射之得鹿若鹿不同馬獵追之問幾何里而及之術曰置斜

逐步數，以射步數增之，自相乘，以追之末及步數，自相乘，減之，餘以開方除之，所得，以減斜逐步數，餘爲法，以斜逐步數乘末及步數爲實，實如法得一。按此始以開方，終以衰分也。馬比鹿每五十步多二步，必九百步而後多三十六步也。二與五十，爲三十六與九百之比例也。題亦可云，斜逐六十步得之，此則六十步多十二步，當一二與六十，爲三十六與一百八十之比例，今題云，未及十步，斜射得之，此故爲隱伏以示學者，前用開方，宜連末及之步，後用比例，止取斜逐之餘，變化存乎一心，實自然之理耳。

有兩率以衰分求之有兩差以盈不足求之無率而欲有率以均輸求之無差而欲有差以盈不足之假令求之設率與設差之術通率不可設則設其差

九章算術盈不足云今有人持錢之蜀賈利十三初返歸一萬四千次返歸一萬四千次返歸一萬三千次返歸一萬二千次返歸一萬一千後返歸一萬凡五返歸錢本利俱盡問本持錢及利各幾何術曰假令本錢三萬不足一千七百三十八錢半令之四萬多三萬五千三百九十錢八分此即張邱建持錢之洛之趣也又云今有漆三得油四油四和漆五今有

漆三斗欲令分以易油還自和餘漆問出油得漆和漆各幾何此卽紫草染緺之術也并漆三漆五爲緫數與油四可求三斗中所易之油與漆三可求三斗中所出之漆與漆五可求三斗中所和之漆九章不以隸均輸而以隸盈不足者均輸者於均之中求其均假令者設爲不均以求其均衰分與盈不足相表裏故衰分之均輸亦與盈不足之假令相表裏葢有定率則可馭以衰分有盈朒則可馭以盈不足無盈朒而設爲盈朒猶之無定率而設爲定率也試推言之盈不足術云今有米在十斗桶中不知其數滿中

添粟而舂之，得七斗，問故米幾何。術曰，假令故米二斗，不足二升，令之三斗，有餘二升，此以十斗七斗與粟米之率心計，而先得盈朒數也，張邱建算經云，今有器容九㪷，中有米不知其數，滿中粟舂之，得米五㪷八升，問滿粟幾何。術曰，置器容九㪷，以米數減之，餘以五之二而一。草曰，置九㪷，以米五斗八升減之，得三㪷二升，以粟率五因之，得石六㪷，以糲率二㪷除之，得八㪷爲粟，按原有之米，與粟所舂之米，合爲五斗八升，則原粟之數，不能於合數中求得之，然米則合而糲，則專，故於九斗中減去米，餘三斗二升，則

糲矣。於是用糲率二爲一率，粟率五爲二率，糲三斗二升爲三率，求得粟八斗爲四率。此以減得糲數，於無定率得定率也。又今有醇酒一斗，直錢五十，行酒一斗，直錢一十。今將錢三十，得酒二斗，問醇行酒各幾何。術曰：假令醇酒五升，行酒一斗五升，有餘一十；令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。張邱建算經云：今有清酒一斗，直粟十斗；醑酒一斗，直粟三斗。今持粟三斛，得酒五斗，問清醑酒各幾何。術曰：置得酒斗數，以清酒直數乘之，減去持粟斗數，餘爲醑酒實。又置得酒斗數，以醑酒直數乘之，以減持粟斗數，餘

爲清酒實各以二直相減餘爲法實如法而一按此有共數共值有貴賤率故以貴賤衰分之術馭之也盈不足術云今有黃金九枚白銀十一枚稱之重適等交易其一金輕十三兩問金銀一枚各重幾何術曰假令黃金三斤白銀二斤十一分斤之五不足四十九於右行令之黃金二斤白銀一斤十一分斤之七多十五於左行張邱建算經云今有金方七銀方九稱之適相當交易其一金輕七兩問金銀各重幾何術曰金銀方數相乘各以半輕數乘之爲實以超方數乘金銀方數各自爲法實如法而一按以金方

七銀方九爲母金之超數二銀之超數三爲子母同子齊以爲定率然後兩用今有術以得之子齊爲一率母同爲二率半輕數爲三率求得每方重數爲四率蓋以金銀並言爲交易分言之則爲損金以益銀損銀以益金凡損此益彼其數必倍詳卷一故交易其一而超數爲二也此可相參而悟者在本書亦自明之均輸鳧雁之術循既詳之於前矣於盈不足術又列題云今有垣高九尺瓜生其上蔓日長七寸瓠生其下蔓日長一尺問幾何日相逢瓜瓠各長幾何術曰假令五日不足五寸令之六日有餘一尺二寸按

鳧雁無里數此垣高有尺數似有不同然試通之并瓠蔓瓜蔓爲一十七寸以除九尺之垣即得日數以瓠蔓乘之得瓠尺以瓜蔓乘之得瓜尺鳧雁無里數故必相乘而後除之此有尺徑除此尺數可矣又二題云今有蒲生一日長三尺莞生一日長一尺蒲生日自半莞生日自倍問幾何日而長等今有垣厚五尺兩鼠對穿大鼠日一尺小鼠亦日一尺大鼠日自倍小鼠日自半問幾何日相逢各穿幾何此二者不可通於均輸何也曰自倍之率爲一二四八十六衰分術云今有女子善織日自倍五日織五尺問日織

幾何此知五日則有五日之率蒲莞大小鼠之術雖有各率而無日數無日數則率不可定故必以盈不足之假令馭之而不可通諸衰分也又良馬駑馬之術見於衰分者甚多盈不足術云今有良馬與駑馬發長安至齊齊去長安三千里良馬初日行一百九十三里日增十三里駑馬初日行九十七里日減半里良馬先至齊復還迎駑馬問幾何日相逢及各行幾何日增十三者今日於初日里數外增十三明日則於所增外又增十三也日減半者今日於初日里數外減半里明日則於所減外又減半里也與日自

倍日自半之數不同而其不可爲定率則同故亦必以盈不足之假令馭之而不可通諸衰分也

凡比例以甲率乘丙率與乙率自乘等

比例之理出於盈朒比例之法出於互乘盈朒之理甲乙丙爲平列乙多於甲之數即乙少於丙之數其相去以加減故倍中數即首尾相加之數亦例之以加減也比例之理甲乙丙爲遞列乙乘於甲之數即乙除於丙之數其相去以乘除故中數自乘即首尾相乘之數亦例之以乘除也其法出於互乘者甲乙丙丁平例爲四率縱列爲母子以一率乘四率即以

左母維乘右子也以二率乘三率即以右母維乘左子也

甲一 一加一爲二　一加三爲四
乙二　二倍之爲四
丙三 三減一爲二　三加一爲四

甲一 一乘二爲二　一乘四爲四
乙二　二自乘爲四
丙四 二除四爲二　四乘一爲四

右比例用加減乘除減同理

甲二 維乘 乙四 得一十二
丙三 維乘 丁六 得一十二

甲二 一率 乘丁爲一十二
乙四 二率 乘丙爲一十二
丙三 三率 乘乙爲一十二
丁六 四率 乘甲爲一十二

右比例與維乘同法

乙率自乘以甲率除之得丙率以乙率自乘與甲丙并率之半自乘相減餘開方除之與并數之半相減其數等乙率自乘以丙率除之得甲率以乙率自乘與甲丙并率之半自乘相減餘開方除之與并率之半相加其數等

乙率自乘既等於甲之乘丙甲除之得丙丙除之得甲即母半則子倍母倍則子半之理也同是積也在乙自乘爲方在丙甲相乘爲縱方爲縱方則甲爲長丙爲濶矣知乙自乘積知甲而求丙則以甲除之是

也。知乙自乘積。知丙而求甲。則以丙除之。是也。若知乙自乘積。知甲丙共積。而不能分析甲與丙之各數。則以之求丙。無甲可除。以之求甲。無丙可除。則仍以縱方之理求之。聚平方之四。如田字。聚縱方之四。盈朒相觸。中餘縱乘縱之小平方。乙自乘之平方。旣化爲甲乘丙之長方。則甲丙相并。卽縱廣相和。故用求帶縱平方和之術以得之。求帶縱平方和之術。以和數自乘。減積數之四倍。而開方之。得縱乘縱之方。與和數相加而半之。得縱。與和數相減而半之。得廣。今不以積數四倍。而以和數折半。凡倍之自乘。必得四

倍則凡四之一自乘其邊必當四倍者之半也已豫半之而開方所得縱乘縱之方不待半之矣此又豫半豫倍之理也見卷一

三率

丙自乘積

一率

從廣和數二十

甲率乘丙率以乙率除之仍得乙以甲率乘乙丙之并率以甲率爲縱開方除之其數等以丙率乘甲乙之并率以甲率爲縱開方除之其數等

知甲乘丙之數知乙數不必以乙除之自知乙矣若知甲率知乙丙合率而不知乙或知丙率知甲乙合率而不知乙則亦以縱方之理通之夫丙乘甲以乙除之仍得乙者以乙之自乘其數卽丙甲之相乘也乙自乘旣卽爲丙甲之相乘則以甲乘乙丙之并率爲甲乘乙甲乘丙各一者不啻甲乘乙乙乘乙各一也甲乘乙乙乘乙又不啻乙乘甲乙之并也乙乘甲乙之并卽以甲爲縱以乙爲廣之帶縱平方今求爲廣之乙故以甲乘乙丙以甲爲縱開方除之卽得乙也抑乙自乘旣卽爲丙甲之相乘則以丙乘甲乙之

并率爲丙乘乙丙乘甲各一者不啻丙乘乙乙乘乙之各一也丙乘乙乙乘乙又不啻乙乘丙乙之并也乙乘丙乙之并即以丙爲縱以乙爲廣之帶縱平方今求爲廣之乙故以丙乘甲乙以甲爲縱開方除之亦即得乙也

以甲率爲從

得乙率

乙自乘之積同甲乘丙之積

乙率
丙并率
乙率
丙率
甲率

甲乘丙之積同
乙自乘之積

乙丙相乘以丁除之得甲以甲除之得丁甲丁相乘以乙除之得丙以丙除之得乙甲丁相乘減乙丙并率自乘之半開方除之相加得乙相減得丙乙丙相乘減甲丁并率自乘之半開方除之相加得甲相減得丁

九章句股題云今有邑方不知大小各中開門出北

門二十步有木出南門十四步折而西行一千七百七十五步見木問邑方幾何術曰以出北門步數乘西行步數倍之爲實并出南門步數爲從法開方除之卽邑方注云以折而西行爲股自木至邑南十四步爲句以出北門二十步爲句率北門至西隅爲股率按依注當以句爲一率股爲二率句率爲三率求得四率爲城之半廣但句無數二率三率相乘不能以一率除之得數故以二率乘三率之數倍之而以一率之數可知者爲縱而開方之其故何也二率三率相乘之積卽一率四率相乘之積是積也邑方之

半在其中倍之則邑方全在其中矣故以縱方法求之而得其數蓋不得之於邊而得之於積得之於邊則用異乘同除得之於積則用帶從開方其術之精巧總本於二三之相乘等一四之相乘也

以乙乘丙丁并率甲乙并率除之得丁以甲乘丙丁并率甲乙并率除之得丙以乙乘甲丁并率乙丙并率除之得甲以丙乘甲丁并率乙丙并率乘之得丁以丙乘甲乙并率以丙丁除之得甲以丁乘甲乙并率以丙丁除之得乙以甲乘乙丙并率以甲丁除之得乙以丁乘乙丙并率以甲丁除之得丙

連比例中率自乘。故可以縱法馭之。斷比例中率相乘。不可以爲方。故不可以連比例之術通之也。然旣有四率。則比例之中。分合皆可爲比例。故仍以比例通之。而其用無窮矣。西法幾何原本列比例之法一十有二。曰同理比例。曰相連比例。曰順推比例。曰反推比例。曰遞轉比例。曰分數比例。曰合數比例。曰更數比例。曰隔位比例。曰錯綜比例。曰加數比例。曰減數比例。統而計之。卽維乘之理而已。

甲率自乘。以丙率乘之。與乙率自乘以甲率乘之等。甲率自乘以丁率乘之。與甲乙丙三率連乘等。與乙率再

自乘等

甲丙相乘既同於乙之自乘則以甲丙相乘之數又以甲乘之以乙自乘之數又以甲乘之其數之同可知也甲丁相乘既同於乙丙相乘則以甲丁相乘之數又以甲乘之以乙丙相乘之數又以甲乘之其數之同可知也甲丙相乘既同於乙之自乘則乙自乘之數又以乙乘之以甲丙相乘之數又以乙乘之其數之同可知也以甲丙相乘之數又以乙乘之不啻以乙丙相乘之數又以甲乘之所謂甲乙丙三率連乘也乙之再乘既同於甲乙丙之連乘則與甲丁相

乘又以甲乘之之數亦同矣以丙自乘乙爲斜弦以乙自乘甲爲斜弦甲之於乙如乙之於丙以乙乘丙甲爲斜弦以丁乘戊乙爲斜弦以丁乘己丙爲斜弦甲之於乙如乙之於戊甲之於丙如丙之於己

句股之比例千變萬化舉之不勝舉惟句股有連比例之三率以弦爲首率句爲中率尾率必弦之小半以弦爲首率股爲中率尾率必弦之大半小半大半之所分恰當中垂線法詳幾何原本其法以自乘通之以一自乘之數畫而爲四小弦必同於大弦小邊必同於

大邊推之相乘之縱方形雖差而理亦同也

以丙乘乙甲爲斜弦甲乙丙兩句股形等以丙乘乙甲爲斜弦以丙中分之半丙於半甲半乙猶全丙於全甲全乙

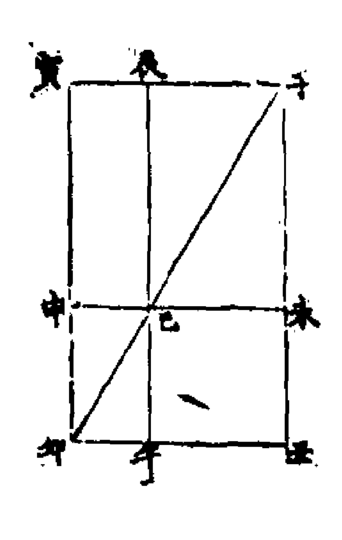
衰分均輸之術合之句股此西法比例相求之原蓋以一方形斜剖為兩句股則此形之句股等於彼形之句股而共一弦此整形也旣剖為兩句股又隨以句股中分之則兩大句股之形內必又成兩隅相連之兩小句股形兩小句股卽兩大句股之比例也蓋小之視大雖得其半而句同此句股同此股弦共此弦依然一方形斜剖之理也以兩隅相連觀之則四表之立可明矣以小句股在大句股內觀之則兩表之立可明矣九章算術句股題云有木去人不知遠近立四表相去各一丈令左右兩表與所望參相直

從後右表望之入前右表三寸問木去人幾何術曰令一丈自乘為實以三寸為法實如法而一張丘建算經云今有城不知大小去人遠近於城西北隅而立四表相去各六丈令左兩表與西北隅南北望參相直從右後表望城西北隅入右前表一尺二寸又望西南隅亦入右前表四寸又望東北隅亦入左後表二丈四尺術曰置表相去自乘以望城西北隅入數而一得城去表又以望城西南隅入數而一所得減城去表餘為城之南北以望城東北隅入左後表數減城去表餘以乘表相去又以入左後表數而一

卽得城之東西。二書爲算。雖有不同。而其爲兩隅相連之理則同也。九章算云。有山居木西。不知其高。山去木五十三里。木高九丈五尺。人立木東三里。望木末適與山峯斜平。人目高七尺問由高幾何。術曰。置木高減人目高七尺餘以乘五十三里爲實以人去木爲法。實如法而一。所得加木高。卽山高。此術木爲半股。木至人爲半句。木頂至人目爲半弦。以例山高之全股。山至人目之全句。山頂至人目之全弦。劉徽撰海島算經。用兩竿。卽本木與人之意也。九章算術又有算邑方題云。邑方二百步。各中開門。出東門十

五步有木問出南門幾何而見木術曰出東門步數爲法半邑方自乘爲實實如法得一步此句股中減去容方餘存兩句股爲比例也因所減去之容方一爲句一爲股被自乘即二三率相乘也若此句彼股出於所容之從方則不可以用自乘矣幾何原本有兩線平行之率爲內外角對角並角之所從生究其原則出於一正方斜剖而參伍錯綜之無不合也

甲乙丙所謂平行線也子己與己卯互例以其出於甲也子未與未丑與辰己與己午與寅申與申卯互例以其出於乙也子辰與辰寅與未己與己申與丑



午與午卯互例以其出於丙也以子辰巳與巳午卯互例即四表之法也以巳午卯與子丑卯互例即兩竿之法也以子未巳與巳午卯互例即方城之法也

乾
震
坤
坎
兌
離

坎離震兌為所立四表以坤坎離與乾兌離為例猶前圖子辰巳與巳午卯互例

右九章算術立四表圖

右張邱建算經立四表圖

角亢氐房所立四表。心尾女與角亢女。尾井房與角氐井。斗牛房與角牛氐。垂猶前圖乎辰巳與巳午卯。

甲自乘以甲爲縱而開方之得乙以乙減甲得丙丙之於乙猶乙之於甲以甲爲股半之爲句求得茲以句減弦得乙以乙減股得丙其比例等以乙爲股半之爲句

求得弦以句加弦得甲以乙減甲得丙其比例等
比例之法有二其一出於差分異乘同除也其一出於自乘理分中末也異乘同除者有定率二以例今有之數如四之與六例六之與九是也理分中末者有全分一以求大分小分之比例如全分一十則中六一八口三末三八一九七是也異乘同除上既詳言之矣而理分中末之術爲西人所獨擅之奇秘其名曰神分綫梅勿菴以句股和句股較倍句之法通之循謂皆自然之數也異乘同除之比例但如其分析之數以相乘其比在例之外也理分中末之比例

必如其首率之數以中分其比在例之內也彼以中率自乘首率除之而得末率此以首率自乘縱方開之而得中率末率其法有不同也彼有二而得三此有一而得三有二得三則三生於二故中末二率合之與首率差有一求三則三生於一故中末二率合之與首率同彼以馭隱伏糅雜而假以爲憑此以求等邊諸商而資以爲鵠其用有不同也法用平方縱方故亦可用句股和句股較以首率自乘用縱方開之而得中率以中率自乘用縱方開之而得末率末率之縱方積同於中率之平方積而中率之縱方積

同於首率之平方積。此比例之根也。若合首率中率爲首率。則首率爲中率。中率爲末率。若以中率爲首率。則末率爲中率。末率減中率爲末率。二下推之。至於無窮。無不皆然。唯其出於平方縱方。故又可馭之以句股。唯其以平方化縱方。故必令句半於股。股倍於句。平方化縱方。必爲一小縱方連於大縱方。又即爲一小平方。連於大平方。若廣之爲一縱方斜剖爲句股。則一小平方。必爲句股內所容之方。大平方即容方界上之餘。此容方界上之餘。不必定爲平方。而理分中末。則必得其爲平方。故倍句爲股半股爲句

也以大平方之邊爲股半之爲句其弦必小平方之邊加大平方邊之半今既以大平方之邊爲首率則股爲首率矣以小平方之邊爲中率則弦減句爲中率矣以小平方邊減大平方邊所餘爲末率則以弦句較減股爲末率矣連大平方小平方兩邊爲首率則句弦和爲首率矣大平方邊爲中率則股爲中率小平方爲末率則句弦較爲末率矣

加減乘除釋卷八

江都焦循學

以加來者，消之以減，以乘來者，消之以除。

劉氏九章算術方田注云，子有所乘，故母當報除，此爲方田之乘分而言，循謂算法之精妙，無踰此兩言也。九章之盈不足方程，所以馭叢雜不齊之數者，至精至奧，大率所舉而問者，以乘爲隱伏，多一乘，則多一重隱伏，而所以發其隱伏，則用除，多一重隱伏，則多一除以發之，是以乘入之，以除出之，故曰報除也。蓋算之艱，惟其叢雜而隱伏，有相乘雜乘，可以化叢

雜爲齊同有報除可以化隱伏爲顯著而算之能事盡矣如有物一錢得三枚此無俟算也若以乘通之云有物二錢得六枚三錢得九枚此則以二乘三爲六以三乘三爲九矣是爲多一乘必以二除六以三除九而後得之或并二三爲五并六九爲十五以五除十五而後得三或六九相減爲三二三相減爲一以一除三而後得三或二三相乘爲六倍之爲十二二維乘九三維乘六相加爲三十六以十二除三十六而後得三所謂報除以發之也又如有二物甲一錢得二枚乙一錢得三枚此亦無俟算也若以乘通

之云有二物不知價但言甲二錢乙三錢共得一十三枚甲五錢乙四錢共得二十二枚此則以二乘二爲四以三乘三爲九合爲一十三以二乘五爲一十以三乘四爲一十二合爲二十二是爲多一乘又多一并多一并則叢雜矣多一乘則隱伏矣叢雜用相乘雜乘以齊之以甲二甲五相乘爲一十減盡以甲二徧乘乙四爲八徧乘二十二枚爲四十四以甲五徧乘乙三爲一十五徧乘一十三枚爲六十五以八與一十五相減爲七以四十四與六十五相減爲二十一是也隱伏用報除以發之以七除二十一得三

爲乙數是也若舉其較數則云甲二乙三較五甲五乙四較二亦兩甲相乘減盡甲二徧乘乙四爲八徧乘二爲四甲五徧乘乙三爲一十五徧乘五爲二十五八與十五相減爲七二十五與四相減爲二十一以七除二十一爲三亦用徧乘報除之術以得之此方程所爲用除法也以言盈不足之術如云三盈一五朒一不俟算而知其爲四如云人出三盈三人出五朒三此則以三乘四爲十二乘三爲九乘五爲一十五以一十二較九爲盈三較十五爲朒三是爲多一乘必以三維乘三爲九以五維乘三爲一十五九

與一十五。異名相加。爲二十四。以三與五相減爲二。以二除二十四。得一十二。是亦報除以發其隱伏也。并兩三爲六。以減餘二除之得三。爲人數。兩三皆差數。故以出率之差除之。不啻方程之以減餘除減餘也。物數必由差得整數。乃可求。由差得整數。故維乘以齊之也。劉氏注衰分法云。一乘一除。適足相消。相消亦報之謂也。如有物九枚。二人分之。人得四枚半耳。若甲得三分之二。乙得三分之一。必先以二乘九爲一十八。以三除之爲六。爲甲所得。以一乘九爲九。以三除之爲三。爲乙所得。其法數本三除。而又二除。

三分之二，三分之一，是先分爲三，又分爲二也。是多一除，故必先乘以通此一除，後除以消此一乘，所謂一乘一除，以相消也。若以六乘甲二爲十二，以三乘乙一爲三，并之爲共價十五，并六與三爲共物九。問曰，共物九，共價十五，物有一枚值二，一枚值一，求得幾物與每物價若干，是又多一乘，今謂之貴賤差分者也。凡有共物共價，以價除物，則得每物之價，今物價有不同，則不得平除之，然不得平除，而徑用平除，故以賤價乘總物，必朒於總價，以貴價乘總物，必盈於總價，以朒價減總價爲朒餘，以盈價減總價爲盈餘，以不同之價，貴賤相

減除朒餘得貴價除盈餘得賤價亦以除消其乘也

蓋有共物之所分有不同之數之所乘有所乘之分數有所乘之共價今舉共價而隱其所分舉其不同之數而隱其所乘舉所乘之共價而隱其所乘之分數故於所舉之共物與不同之數分乘而又與共價相減而所隱者不終隱矣

以甲之半加甲爲一甲有半以甲之半減之仍得甲有二甲各加甲之半爲一甲有半各倍之互以一甲有半減之仍各得一甲有半有三甲各加兩甲之半爲兩甲各再倍之互以一甲加兩甲之半倍而減之仍各得兩

甲。有甲乙。以乙之半加甲。倍之。以甲之半加乙減之。亦得一甲有半。以甲之半加乙。倍之。以乙之半加甲減之。亦得一乙有半。有甲乙丙。以乙之半。丙之半。加甲。再倍之。以甲之半丙之半加乙。以甲之半乙之半加丙。合而減之。亦得兩甲。以甲之半丙之半加乙。再倍之。以甲之半乙之半加丙。以乙之半丙之半加甲。合而減之。亦得兩乙。以甲之半乙之半加丙。再倍之。以乙之半丙之半加甲。以甲之半丙之半加乙。合而減之。亦得兩丙。

張邱建算經。有方程之題云。孟仲季兄弟三人。各持絹不知匹數。大兄謂二弟曰。我得女等絹各半。滿七

十九匹仲弟曰我得兄弟絹各半滿六十八匹小弟曰我得二兄絹各半滿五十七匹問兄弟本持絹各幾何術以大兄二中弟一小弟一合一百五十八大兄一中弟二小弟一合一百三十六大兄一中弟一小弟二合一百一十四如方程而求即得是也孫子算經有術云甲乙丙三人持錢甲語乙丙各將公等所持錢半以益我錢成九十乙語甲丙各將公等所持錢半以益我錢成七十丙語甲乙各將公等所持錢半以益我錢成五十六問三人原持錢各幾何此即兄弟持絹之術乃不用方程別爲法云先置三八

所語爲位以三乘之各爲積甲得二百七十乙得二百一十丙得一百六十八各半之甲得一百三十五乙得一百零五丙得八十四又置甲九十乙七十丙五十六各半之以甲乙減丙以甲丙減乙以乙丙減甲即各得原數術捷於方程而消息甚巧循謂以半言之似奥以全觀之則顯而易知也以甲乙丙不等言之似雜以平分觀之則純而可見也如甲之數二加半甲一爲三是爲一甲有半倍之爲六而以三減之仍得三婦孺所共知也甲之數二加兩半甲二爲四是爲兩甲三之爲十二而以八減之仍得四亦婦

孺所共知也蓋倍一甲即不啻并兩甲再倍一甲即
不啻并三甲倍一甲而以一甲減之再倍一甲而以
二甲減之即不啻以一甲減二甲以二甲減三甲也
若變二甲為甲乙有如甲四乙二以乙之半一加甲
為五固不同以甲之半加甲為一甲有半也倍之為
一十亦不同倍一甲有半為三甲也乃互以甲之半
二加乙為四以減一十得六亦為一甲有半且推之
倍四為八以五減八得三亦即一乙有半也若變三
甲為甲乙丙有如甲六乙四丙二合乙丙之半為三
加甲得九固不同於以兩甲之半加丙為兩甲也再

倍之爲二十七、亦不同再倍兩甲、爲六甲也、乃互以甲乙之半加丙爲七、以甲丙之半加乙爲八、合之爲十五、減二十七爲十二、亦爲兩甲、推之再倍乙八爲二十四、以甲九丙七、合爲十六、減之得八、亦爲兩乙、再倍丙爲二十一、以甲九乙八、合爲十七、減之得四、亦爲兩丙、爲兩甲兩乙兩丙、半之卽一甲一乙一丙也、三甲與甲乙丙之數不同、一經加減而其數無不同者、則消息之妙也、甲之所加者爲乙之半、倍之是爲二甲一乙、乙之所加者爲甲之半、倍之是爲二乙一甲、以甲與乙之半、減二乙一甲、餘非一乙有半乎、

以乙與甲之半。減二甲一乙。餘非一甲有半乎甲之

所加者。半丙半乙。再倍之。是爲三甲及一乙有半一

丙有半。乙之所加者。半甲半丙。再倍之。是爲三乙及

一甲有半一丙有半。丙之所加者。半甲半乙。再倍之。

是爲三丙及一甲有半一乙有半。合一乙半甲半丙。

一丙半甲半乙。爲一甲一乙有半一丙有半。減三甲

一乙有半一丙有半。餘非二甲乎。合一丙半甲半乙。

一甲半乙半丙。爲一乙一甲有半一丙有半。減三乙

一甲有半一丙有半。餘非二乙乎。合一甲半乙半丙。

一丙半甲半乙。爲一丙一甲有半一乙有半。減三丙

一甲有半一乙有半餘非二丙乎由互加而雜復以
互減而純盈虛相補殊途而同歸其理固了然可見
也以既減之餘得兩甲兩乙兩丙今所求者一甲一
乙一丙故半其三乘之積復半其所知之數此即豫
半之理耳至奧之義以至平易推之無不可渙然冰
釋也

甲甲甲甲本數四　甲甲加其半爲六甲

乙乙本數二　乙加其半爲三乙

甲甲甲甲本數四　乙加乙之半爲四甲一乙　甲甲甲甲乙倍之爲八甲二

乙以二乙二甲減之亦得六甲

乙乙本數二甲甲加甲之半二乙二甲為乙乙甲甲倍之為四乙四甲以

四甲一乙減之亦得三乙

右甲乙兩數加減相消

甲甲甲甲甲甲本數六甲甲甲加其半甲甲甲加其半共十

二

乙乙乙乙本數四乙乙加其半乙乙加其半共八

丙丙本數二丙加其半丙加其半共四

甲甲甲甲甲本數六乙乙加乙之半丙加丙之半為六甲甲二乙一丙甲

甲甲甲甲甲乙乙丙加倍一甲甲甲甲甲甲乙乙丙又加

一倍為十八以六乙三丙六甲減之亦得十二甲

甲六乙三丙

乙乙乙乙本數四甲甲甲加甲之半丙加丙之半爲四乙三甲一丙乙乙

乙乙甲甲甲丙倍之乙乙乙乙甲甲甲丙再倍之爲十二乙九甲三

丙以九甲三丙四乙減之亦得八乙

丙丙本數二甲甲甲加甲之半乙乙加乙之半爲丙三甲二乙二丙丙甲

甲甲乙乙倍之丙丙甲甲甲乙乙再倍之爲六丙九甲六乙以九甲

六乙二丙減之亦得四丙

右甲乙丙三數相消

以甲加乙以乙加丙以丙加甲合而半之以甲乙減之

得丙以乙丙減之得甲以甲丙減之得乙以甲加乙而

減丙以甲加丙而減乙合之爲倍甲以乙加甲而減丙

以乙加丙而減甲。合之爲倍乙。以丙加甲而減乙。以丙加乙而減甲。合之爲倍丙。以甲乙丙相加而減倍丁。以甲乙丁相加而減倍丙。以甲丙丁相加而減倍乙。合之得三甲。以甲乙丙相加而減倍丁。以甲乙丁相加而減倍丙。以乙丙丁相加而減倍甲。合之得三乙。以甲乙丙相加而減倍丁。以甲丙丁相加而減倍乙。以乙丙丁相加而減倍甲。合之得三丙。以甲乙丁相加而減倍丙。以甲丙丁相加而減倍乙。以乙丙丁相加而減倍甲。合之得三丁。

甲乙相加。減乙得甲。減甲得乙。詳見卷一。推此則甲

乙丙相加減乙丙仍得甲減甲乙仍得丙減甲丙仍得乙可知也乃於此加即於此減固也有所加在此而所減在彼則以交互得之何也甲乙丙相加猶是一甲一乙一丙也甲加乙乙加丙丙加甲則兩甲兩乙兩丙矣故合而半之也然此爲和數其減法易明若甲加乙而減去一丙甲加丙而減去一乙是兩甲一乙一丙之中互減一乙一丙也於兩甲一乙一丙之中互減去一乙一丙所存者非兩甲乎所謂合之爲倍甲也葢彼之甲加乙減丙此之甲加丙減乙一經轉移即不啻彼之甲加乙而復減乙此之甲加丙

而復減丙，加而復減，不啻無加，故仍存彼此之兩甲耳。於此而舉其差，即舉兩甲也。推之甲與乙丙丁三數相加相減，亦可以甲與乙丙兩數相加相減之理通之。但兩數爲兩甲者，三數自爲三甲；兩數爲一乙一丙相互者，三數自爲兩乙兩丙兩丁相互也。何也？甲與三數相加減，其目有四，甲乙丙丁。其數則九，甲乙丙甲乙丁甲丙丁。九數中甲居其三，乙丙丁各居其二也。乙丙丁既各居其二，則於三甲兩乙兩丙兩丁之中，必互減去兩乙兩丙兩丁，而後乃得三甲也。若止減一乙一丙一丁，則仍有一乙一丙一丁與三甲相糅入而不

能辨畢一乙一丙一丁之減餘必不可以知甲也方程章徧乘之後兩行相減名曰直除劉氏注云消去一物蓋方程本數色相并今以徧乘齊之而兩行相減即減其所并也原於甲之價加乙之價徧乘之後消去乙之價仍存甲之價矣立天元一法用相消吾友元和李尚之銳云相消即相減方程所謂直除精核足補梅總憲之說詳其所校測圓海鏡中

以甲中分之各乘以甲合之如甲自乘之數以甲盈朒分之各乘以甲合之其數等

甲自乘爲平方以甲乘半甲則爲平方之半故合之

仍爲平方盈朒分之亦然

以甲中分之各乘以乙合之如甲乙相乘之數以甲盈朒分之各乘以乙合之其數等以甲盈朒分之又以乙盈朒分之或以甲之盈朒徧乘乙之盈朒或以乙之盈朒徧乘甲之盈朒合之其數等

甲乙相乘爲縱方甲爲縱乙爲廣半甲乘乙則廣如故而縱半半乙乘甲則縱如故而廣半故必合之也若以甲之盈乘乙之盈則僅得縱與廣之大半又必以甲之盈乘乙之朒爲得縱之大半廣之小半合之爲縱之大半乘廣之全爲甲乙相乘之縱方大半也

是又必以甲之朒乘乙之盈與朒爲甲乙相乘之縱方小半而後合成縱方之全也是爲以甲之盈朒徧乘乙之盈朒若以乙之盈朒徧乘甲之盈朒其數亦等者卽甲乘乙同於乙乘甲之理也

六乘八得四八 設爲甲六乙八

二乘八得一六 四乘八得三二 合之亦四八 二爲甲之朒 四爲甲之盈

六乘三得一八 六乘五得三〇 合之亦四八 三爲乙之朒 五爲乙之盈

二乘三得六 二乘五得一〇 合之爲一六 合之亦

四乘三得一二 四乘五得二〇 合之爲三二 得四八

三乘二得六 三乘四得一二 合之爲一八 合之亦

五乘二四得一〇二〇合之爲三〇　得四八

以甲之盈朒偏乘乙之盈朒各相加而減之以甲盈甲朒之差除之得乙以乙之盈朒偏乘甲之盈朒各相加而減之以乙盈乙朒之差除之得甲

甲乙相乘甲除之得乙乙除之得甲易知也以甲之盈乘乙以乙除之得甲之盈以甲之朒乘乙以乙除之得甲之朒以乙之盈朒乘甲以甲除之得乙之盈朒亦易知也并盈朒所偏乘并盈朒除之得甲乙以盈朒所偏乘相減以盈朒相減除之亦得甲乙此卽以差除差之理也

一六減三二餘一六以二一減四餘二一除之得八

一八減三〇餘一二以三減五餘二除之得六

以甲之盈朒偏乘乙之盈朒互相加而減之以甲盈甲朒之差除之得乙盈乙朒之差以乙盈乙朒之差除之得甲盈甲朒之差

互相加者以甲之所偏乘與乙之所偏乘錯綜加之也同一以差除差在各相加則得甲乙之全在互相加則僅得甲乙盈朒之差者各相加雖有盈朒之分而盈朒之差原與偏乘得數之差相應故除之卽得甲乙之全數一經交互則以盈朒相補不復如各相

加者之差。有數倍之多。但乘既犬牙。數即枘鑿。一以甲盈乘乙盈。甲朒乘乙朒。一以甲盈乘乙朒。甲朒乘乙盈。二者相較。正差一甲盈甲朒之差。乘乙盈乙朒之差。既差一甲盈甲朒之差。乘乙盈乙朒之差。則以甲盈甲朒之差除之。得乙盈乙朒之差。以乙盈乙朒之差除之。得甲盈甲朒之差。又何疑乎。

二乘三得六。四乘五得二○。互加爲二六。合之亦

二乘五得一○。四乘三得一二。互加爲二二。得四八

二四相減餘二。二六二二相減餘四。以二除四得二

三五相減餘二。二六二二相減餘四。以二除四得二

右二四與三五皆差二一恐不足以明更設差二一差三以明之

三五乘二五得〇六二五互加為三一

三五乘五二得一五一〇互加為二一五

三五相減餘二〇一二五相減餘六以二除六得三

二五相減餘三三一二五相減餘六以三除六得二

以甲盈朒分之以乙盈朒分乘之互相加以所乘得之盈徧乘甲之盈朒相減以甲盈甲朒之差除之仍得所乘之盈以所乘得之朒徧乘甲之盈朒相減以甲盈甲朒之差除之仍得所乘之朒以所乘得之盈徧乘乙之

盈朒相減以乙盈乙朒之差除之仍得所乘得之盈以所乘得之朒徧乘乙之盈朒相減以乙盈乙朒之差除之仍得所乘得之朒

此亦以差除差本無所互故盈仍得盈朒仍得朒也前甲乙分立則甲差除得乙乙差除得盈此所乘得之盈朒爲甲乙所共故無分別耳

二六徧乘二四得〇五二一〇四減餘五二以二四相減餘二除五二仍得二六

二二徧乘二四得〇四四〇八八減餘四四以二四相減餘二除四四仍得二二

二六徧乘三五得〇七八一三〇減餘五二以三五相減餘二除

五二仍得二六

二二徧乘三五得〇六六一一〇減餘四四以三五相減餘二除

四四仍得二二

以甲盈朒分之以乙盈朒分乘之互相加以甲之盈乘加之朒朒乘加之盈相減以甲盈甲朒之差除之又以甲除之得乙之朒以甲之盈乘加之盈朒乘加之朒相減以甲盈甲朒之差除之又以甲除之得乙之盈以乙之盈乘加之朒朒乘加之盈相減以乙盈乙朒之差除之又以乙除之得甲之朒以乙之盈乘加之盈朒乘加

之朒相減以乙盈乙朒之差除之又以乙除之得甲之盈

互加之後亦有盈朒前徧乘乃各相乘猶各相加也此互相乘猶互相加也盈朒互乘兩相補則其差必少故除得朒盈乘盈則益盈朒乘朒則愈朒兩相較則其差必多故除得盈以甲乘得者其減餘爲乙之盈朒以乙乘得者其減餘爲甲之盈朒何也本甲乙之盈朒互乘又乘之以甲則甲與甲相消而乙之差獨著矣或乘之以乙則乙與乙相消而甲之差獨著矣消息之妙其理甚微會而通之自得矣

以甲之盈四朒二乘加之朒二二盈二六得。五二八八相減餘三六以二四相減餘二除之得一八以甲六除之得乙之朒三

以甲之盈四朒二乘加之盈二六朒二二得。一○四四四相減餘六○以二四相減餘二除之得三○以甲六除之得乙之盈五

以乙之朒三盈五乘加之盈二六朒二二得。七八一一○相減餘三二以三四相減餘二除之得一六以乙八除之得甲之朒二

以乙之盈五朒三乘加之盈二六朒二二得。一三○六六相減餘六四

以三五相減餘二除之得三二以乙八除之得甲之盈

四

以甲中分之各自乘得甲自乘之半以甲盈朒分之各

自乘其數等

凡邊之倍者其冪必四倍邊之半者其冪止得四分

之一故甲之半各自乘止得甲自乘之半也

以甲乙各中分之各相乘得甲乙相乘之半以甲乙各

盈朒分之以甲盈乘乙盈得盈以甲朒乘乙朒得朒乙

之盈朒互乘所得之盈朒更得盈朒又以乙之盈朒自

互乘以除更得之盈得甲之盈以除更得之朒得甲之

朒甲之盈朒互乘所得之盈朒更得盈朒又以甲之盈朒自互乘以除更得之盈得乙之盈以除更得之朒得乙之朒

中分甲乙兩半相乘猶兩半自乘之理也若盈朒分之則所得之半亦有或盈或朒之殊矣葢甲乙而分其一是一而二故以半乘之恰當其半甲乙而並分之是二而四故以半乘半恰當四分之一分之有盈朒則所爲四分之一者亦必有盈朒故合之或得其半而盈或得其半而朒也甲乙之盈朒互乘所得之盈朒者卽子母維乘也甲乙之盈朒自互乘者兩母

之相乘也。以相乘所得。除互乘所得。卽得甲乙之原數。蓋如以四乘五爲二十。以五除二十。仍得四。可知也。以三乘五爲十五。乘二十爲六十。是五與二十。各加三倍。以加三倍之五。除加三倍之二十。仍得四。亦可知也。二乘三爲六。以三除六。仍得二。可知也。以五乘三爲十五。乘六爲三十。是三與六。各加五倍。以加五倍之三。除加五倍之六。仍得二。亦可知也。齊同之理。前已明之。此更詳其入算之用。凡隱甲之盈朒。舉乙之盈朒。與甲乘乙之盈朒。或隱乙之盈朒。舉甲之盈朒。與乙乘甲之盈朒。均視此以發其隱矣。

以甲盈四乘乙盈五得盈二〇以乙朒三維乘之更得盈六十以三五相乘得一五除之得甲之盈四以甲朒二乘乙朒三得朒〇六以乙盈五維乘之更得朒三十以三五相乘得一五除之得甲之朒二以乙盈五乘甲朒二得朒一〇以甲盈四維乘之更得盈四十以二四相乘得〇八除之得乙之盈五以乙朒三乘甲盈四得盈一二以甲朒二維乘之更得朒二四以二四相乘得〇八除之得乙之朒三

以甲乘乙之盈朒更得盈朒以甲之盈朒分乘乙之盈朒相加與甲乘乙盈所得之盈減得朒與甲乘乙朒所

得之朒減得盈以此盈朒相減以乙之盈朒相減除之得甲若除盈得甲盈除朒得甲朒以乙乘甲之盈朒更得盈朒以甲之盈朒分乘乙之盈朒相加與乙乘甲盈所得之盈減得朒與乙乘甲朒所得之朒減得盈以此盈朒相減以甲之盈朒相減除之得乙若除盈得乙盈除朒得乙朒

甲共物也甲乙之盈朒分乘相加其價也乙之盈朒貴賤也甲乘乙之盈朒卽以貴價乘共價以賤價乘共價也此卽貴賤差分之法有甲之共數有乙之分數有甲乘乙之共數而可求甲之分數明於其理可

隨所宜而用矣

二四乘三五得〇六二〇合之爲二六以六乘三五得一八三〇與二六相減餘〇八〇四以三五相減餘二除之得四二三五乘四二得一二一〇合之爲二二以八乘四二得三二一六與二二相減餘一〇〇六以四二相減餘二除之得五三

九章之術方田少廣商功句股其原出於自乘粟米均輸盈不足方程其原皆出於差分差分之於盈朒猶方田之於少廣差分盈朒之於方程猶方田少廣之於句股蓋有其數有分數有差數由其而分由分而差以乘來者以除而復以分來者以合而復其理

本一其數本約析之以至於縣變之以成其異得其理之一自仍歸於數之約也故隱其中等而舉其分數及差數以問其共數則爲盈朒隱其乘得之數而舉其共數及差數以問其分數則爲差分和其等數而舉其差數以問共數則爲雙套之盈朒和其等數而舉其共數以問差數則爲貴賤之差分由盈朒而變之舉其兩等之差數而隱其兩等之本數則爲較數之方程由差分而變之舉其兩等之共數而隱其兩等之本數則爲和數之方程合差分盈朒而變之舉兩等之差數與共數而隱其兩等之本數則爲和

較雜之方程差分盈朒相爲表裏故和數方程可變爲較較數方程可變爲和此以馭三色四色以上之差分盈朒也要之止此加減乘除數中隱此以問彼隱彼以問此無他道也既露其端倪即可發其隱伏知其全體臨而察之數何可匿乎盈朒之題云一人出七則盈四一人出九則朒十二問盈朒之間究竟幾人人出幾何也貴賤差分之題云一人定出七一人定出九今共五人共出四十一問盈朒之分究竟出七者幾人出九者幾人也雙套盈朒之題云八人出七則盈四五九人出六則朒三問與盈朒同而題

則多一乘矣。貴賤相和差分之題云。甲八人定出七。乙九人定出六。今共人六十。共出四十五。問與貴賤差分同。而題亦多一乘矣。不知前二題其數爲一。故省互乘。而算書亦不復列其數。後二題。既變一爲八爲九。則必用互乘。其術遂似乎有異。因別其名目爲雙套。爲貴賤和。知前題之爲省算。雖不別其名目可矣。差分與平分何以異。如有物九枚。二人平分。則人得四枚半。今不平分而差分。一人得大半三分之二。一人得少半三分之一。明爲二人分之實則三人分之。三人平分。而一人得其二。一人得其一。其法多一

乘而後得合其差數而分之故曰差分以差之合數乚分之以人之得數乘之分本不在人則猶之平分也差分與貴賤差分何以異在差分合甲二乙一除總數今別以不同之二數若六若三以六乘甲二爲十二以三乘乙一爲三并之爲其價一十五并六與三爲其物九問云共物九其價十五物有一枚值二一枚值一求得幾物每物價若干是較差分多一乘多一乘故多一其價也不知差分之甲二乙一除九非無其價其物也蓋甲價六而物二乙價三而物一合之價九而物三差之合卽物之共所舉之九卽價之

共不必用減而後除也若依貴賤差分之法合差三爲共物九爲共價甲二爲貴乙一爲賤以二乘三爲六減九爲三爲乙所得以一乘三爲三減九爲六爲甲所得然則差分爲貴賤差分之省貴賤差分所以通差分之窮貴賤之名亦可以不設也盈朒之題云一人出七則朒八一人出五則盈八所與較而至於盈朒者七也四十八也而五六七所共乘者八也方程較數之題云七較六盈八五較六朒八有差數無出數也差分之題云八人定出七九人定出六共出一百一十一和數方程之題云八人與九人共出一

百一十一。有其數無出數也。無出數將不入算。故必別立一行。而後入算也。差分用減差除實之法。與盈朒同理。惟乘有不同。彼用互乘。此用徑乘。彼互乘得數以爲加減。此並乘其物。而皆與其價相減。蓋彼之兩盈兩朒。皆兩相對待。與上所出之數。兩兩相屬。故必互乘乃齊。此其物其價非同對待。而兩不同之價。不可以分屬。故不可以互乘也。雞兎同籠之術云。其頭三十五。其足九十四。問雞兎各幾何。此其頭其足。猶之其物其價。雞二足。兎四足。猶之價有貴賤。以常法馭之。雞足二乘其頭得七十。與其足減餘二十四。

以兎足四乘其頭得一百四十與其足減餘四十六又以二足四足相減餘二以除二十四得兎一十二以除四十六得雞二十三皆合常法又有九狐七鵰之術狐九尾一頭鵰九頭一尾其頭七十二其尾八十八問狐鵰各幾何此與雞兎之術不同雞兎之貴賤分之於足故卽貴賤差分之常法此頭尾互爲貴賤有不可以常法求者算法統宗以總頭總尾卽其頭其尾相減餘十六爲其數梅循齋總憲辨其爲偶合非通法蓋幷而後減卽得其數無是理也總憲立二法其一云頭尾減餘之數乃狐多於鵰之較數也以兩

物之頭相較而鷄多八頭以尾相較則狐多八尾故以頭尾總數相減若餘八頭則多一鷄餘八尾則多一狐循案此眞至精至簡依是以推則以兩其數相減以尾減尾以頭減頭以減餘除總數之減餘即得矣其二云置總頭七十二以九尾通之爲六百四十八內減總尾八十八餘五百六十爲實又以兩尾相減餘八尾爲法除之得七十爲鷄之頭尾其數退位得七鷄置總頭七十二減鷄頭六十三餘九爲狐循謂此差分常法而說之猶未盡乘除之理會而通之必以九乘其頭以一乘其尾得數相減餘爲實以九

與一相減除之得頭尾其數以九與一相加除之得狐鵰各數總憲以九乘其頭不以一乘其尾者蓋一爲單數一乘不長故省去之然用之九頭一尾九尾一頭者可合用之八頭二尾二頭八尾或五頭四尾四頭五尾遂必不可算退位得七鵰卽相加爲十以除七十得七徒言退位亦未可通諸他數也蓋前賢每就一術力求其簡愈簡則其義愈秘非以乘除加減之理究之前賢之書未易讀也然則九狐七鵰之術法屬差分而意通盈朒何也其頭其尾雖是狐鵰所其而實爲對待可以其尾屬狐其頭屬鵰與其價

其物之絕無分屬之理者異也不用互乘但以兩其數相減者盈朒苦不知其數故互乘以得其數此兩其數已是相其之實數則不必多一乘矣此總恵之簡入法也在本書爲後一法今以一乘其尾八十八以九乘其頭七十二得數相減以九減一而除之此即盈朒互乘之理以其似於盈朒而通之也孫子算經又有八獸七禽之術其題云有獸六首四足禽四首二足其首七十六其足四十六問禽獸各幾何術曰倍足以減首餘半之即獸以四乘獸減足餘半之即禽解見此亦簡法非通法設有獸三首六足禽八首五足

共頭八十、其足八十三、若倍足爲一百六十六、減首八十、餘八十六、半之、四十三、四十三獸、當有一百二十九頭、於共頭八十、且盈、寧有合乎、然則此八獸七禽者何如、此亦差分之近於盈朒者也、比雞兎同籠之術、多一乘、用七鵰九狐之術、亦多一互乘、以六首互乘二足、爲十二、以四首互乘四足、爲十六、相減餘四、以六首乘共足、爲二百七十六、以四足乘共首、爲三百零四、相減、餘二十八、以四除之、得七禽、若以四首乘共足、爲一百八十四、以二足乘共首爲一百五十二、相減、餘三十二、以四除之、得八獸、此即雙套盈

朒之法亦以兩其數可以對待分屬故也若不可以分屬則所謂貴賤相和之差分矣貴賤相和之差分者比差分常法多一相乘互乘以相乘同母之數乘其價然後以互乘所得之兩數遞乘其物減總相除如貴賤差分之法也或用盈朒或用差分惟視乎對待者互乘不對待者遞乘而已匿價差分之二色者如云桃七枚杏九枚價適足桃一枚比杏一枚貴錢三十六此即較數方程也三色者如云綾一百五十疋羅三百疋絹四百五十疋共值二千九百二十八綾一疋比羅一疋多四錢七分羅一疋多絹一疋一

兩三錢五分此卽和較雜之方程也但較數數皆用一則不必以方程馭之可省算也然則匿價差分爲方程之省算其實無可别也其肉其飯之術云用碗一百但知二人共飯三人共肉問其人數及二項碗數此孫子蕩盃之法於差分常法中多一相乘維乘與貴賤差分異與貴賤和差分亦異貴賤差分有共物共價有物不同之價於共物共價中以物不同之價兩相分配以滿其數故必乘得其盈朒之差以爲消息也其肉其飯之術有共碗無共人有其肉其飯之不同於共碗中以其肉其飯之人牽連合一以應

其數故必互得其相齊之根以爲比例也蓋其飯之人即此其肉之人若貴價之物則必非賤價之物故其肉其飯之術即知其人亦不能用減差消息之法貴賤差分之術即隱其物亦不能用互乘比例之法也洞悉乎加減乘除之理隨其理以施其算雖差分盈朒方程之名並可以不立況雙套貴賤和較諸紛紛者哉

門人汪昌序
男　廷琥　校字